

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES



**SISTEMA BIOMÉTRICO NACIONAL PARA *Abies religiosa* (KUNTH)
SCHLTDL. & CHAM.**

Por:

JUAN CARLOS GUZMÁN SANTIAGO

**Como requisito parcial para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MANEJO DE RECURSOS
NATURALES**

Linares, Nuevo León, México

Agosto, 2020

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FORESTALES

SUBDIRECCIÓN DE POSGRADO

SISTEMA BIOMÉTRICO NACIONAL PARA *Abies religiosa* (KUNTH) SCHLTDL. & CHAM.

TESIS DOCTORAL


Para obtener el grado de:

**DOCTOR EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MANEJO DE RECURSOS
NATURALES**

Por:

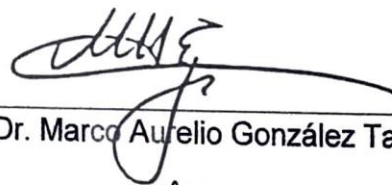
JUAN CARLOS GUZMÁN SANTIAGO

COMITÉ DE TESIS



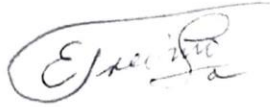
Dr. Oscar Alberto Aguirre Calderón

Director



Dr. Marco Aurelio González Tagle

Asesor



Dr. Eduardo Javier Treviño Garza

Asesor



Dr. Javier Jiménez Pérez

Asesor



Dr. Benedicto Vargas Larreta

Codirector externo

Linares, Nuevo León, México

Agosto, 2020

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico en la etapa de formación académica.

A la Facultad de Ciencias Forestales de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Al Dr. Benedicto Vargas Larreta, investigador titular del Instituto Tecnológico de El Salto, Durango, por facilitar la información de campo

A los integrantes del comité de tesis, Dr. Oscar Alberto Aguirre Calderón, Marco Aurelio González Tagle, Eduardo Javier Treviño Garza, Javier Jiménez Pérez y Benedicto Vargas Larreta.

Al Dr. Martín Gómez Cárdenas

Al Dr. Gerónimo Quiñonez Barraza

A mis padres queridos: Guzmán López Pedro y Santiago Navarro María por su gran apoyo

A mis hermanos: María Otilia, José Luis, Florentino, José, Valentín y Pedro

A Gloria Cruz Marín

A Antonio García Pedro

A mis compañeros y amigos, de manera especial al Dr. Rigoberto González, Mtra. Angelina Bautista, al Dr. Rubén Barrera y Deyanira.

DEDICATORIA

A Dios.....

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL	1
ANTECEDENTES	2
OBJETIVO GENERAL	5
Objetivos específicos	5
BIBLIOGRAFÍA	6
 CAPÍTULO I. RELACIÓN ALTURA-DIÁMETRO PARA <i>Abies religiosa</i> KUNTH SCHLTDL. & CHAM. EN EL CENTRO Y SUR DE MÉXICO	10
1. RESUMEN	10
2. INTRODUCCIÓN	12
3. MATERIALES Y MÉTODOS	13
3.1 Área de estudio	13
3.2 Tamaño de muestra	15
3.3 Modelos ajustados	16
3.4 Método de ajuste y selección de modelos	17
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN	18
4.1 Ecuaciones altura-diámetro seleccionadas	18
4.2 Comparación de las ecuaciones altura-diámetro seleccionadas	19
5. CONCLUSIONES	22
6. REFERENCIAS	23
 CAPÍTULO II. MODELO DE EFECTOS MIXTOS ALTURA-DIÁMETRO PARA <i>Abies religiosa</i> EN DISTINTAS ENTIDADES FEDERATIVAS DE MÉXICO	29
1. RESUMEN	29
2. INTRODUCCIÓN	30
3. MATERIALES Y MÉTODOS	32
3.1 Área de estudio	32
3.2 Tamaño de muestra	32
3.3 Ecuación ajustada	33
3.4 Modelo de efectos mixtos	34
3.5 Método de ajuste	35
3.6 Estadísticos de bondad de ajustes considerados	35
4. RESULTADOS	36
4.1 Información estadística entre UMAFORES	36
4.2 Comparación altura-diámetro (h-d) entre UMAFOR	38
4.3 Evolución del sesgo de las UMAFORES	41
4.4 Evolución de la Raíz del error medio cuadrático (REMC)	45
5. DISCUSIÓN	49
6. CONCLUSIÓN	51
7. REFERENCIAS	52

CAPÍTULO III. ECUACIONES DE VOLUMEN PARA *Abies religiosa* (KUNTH) SCHLTDL. & CHAM. EN DISTINTAS ENTIDADES FEDERATIVAS DE MÉXICO ... 60

1. RESUMEN	60
2. INTRODUCCIÓN.....	61
3. MATERIALES Y MÉTODOS	62
3.1 Área de estudio.....	62
3.2 Tamaño de muestra	63
3.3 Ecuaciones ajustadas	64
3.4 Método de ajuste y selección de modelos	65
3.5 Corrección de heterocedasticidad	66
4. RESULTADOS	67
4.1 Ecuaciones ajustadas	67
4.2 Comparación entre entidad federativa	69
4.3 Evolución del sesgo	71
4.4 Evolución de la Raíz del error medio cuadrático (REMC)	73
5. DISCUSIÓN	75
6. CONCLUSIÓN	77
7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

CAPÍTULO IV. RELACIÓN DEL PERFIL FUSTAL Y VOLUMEN PARA *Abies religiosa* EN DISTINTAS UNIDADES DE MANEJO FORESTAL DE MÉXICO 85

1. RESUMEN	85
2. INTRODUCCIÓN.....	86
3. MATERIALES Y MÉTODOS	88
3.1 Área de estudio.....	88
3.2 Tamaño de muestra	89
3.3 Descripción del perfil fustal	91
3.4 Ajustes del modelo	94
3.5 Método y estadísticos de bondad de ajustes.....	95
3.6 Corrección de heterocedasticidad	96
4. RESULTADOS	97
4.1 Comparación entre UMAFORES	97
4.2 Información volumétrica	103
4.3 Volumen acumulado en distintas alturas.....	106
5. DISCUSIÓN	109
6. CONCLUSIONES.....	111
7. REFERENCIAS.....	111

CAPÍTULO V. ECUACIONES DE CALIDAD DE SITIO PARA *Abies religiosa* EN DISTINTAS REGIONES DE MÉXICO 119

1. RESUMEN	119
2. INTRODUCCIÓN.....	120
3. MATERIALES Y MÉTODOS	123

3.1 Área de estudio.....	123
3.2 Tamaño de muestra.....	123
3.3 Estimación de las alturas verdaderas	124
3.4 Metodología GADA	125
3.5 Método de ajustes	128
3.6 Estadísticos de bondad de ajustes analizados	129
4. RESULTADOS.....	129
4.1 Ecuación dinámica	129
4.2 Familias de curvas de índice de sitio	132
4.3 Análisis de residuos	134
5. DISCUSIÓN	136
6. CONCLUSIONES.....	138
7. REFERENCIAS.....	139

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO I

Figura 1. Distribución de las categorías diamétricas	15
Figura 2. Altura estimada por las ecuaciones (1 y 4) (Izquierda) y residuales (derecha)	20

CAPÍTULO II

Figura 1. Altura-diámetro observado vs predicho: A= 1203, B= 1303, C= 1404, D= 1410, E= 1503, F=1507, G= 1508, H= 1509, I= 1605, J= 1607, K= 1608, L= 2105, M= 2108, N= 2901, O= 2902, P= 3004, Q= 3012	41
Figura 2. Sesgos de categorías diamétricas: A= 1203, B= 1303, C= 1404, D= 1410, E= 1503, F= 1507, G= 1508, H= 1509, I= 1605, J= 1607, K= 1608, L= 2105, M= 2108, N= 2901, O= 2902, P= 3004, Q= 3012	45
Figura 3. Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) de categorías diamétricas: A=1203, B= 1303, C= 1404, D= 1410, E=1503, F= 1507, G= 1508, H= 1509, I= 1605, J=1607, K= 1608, L= 2105, M= 2108, N= 2901, O= 2902, P= 3004, Q= 3012 ..	48

CAPÍTULO III

Figura 1. Volúmenes observados vs predichos: A= Guerrero, B= Hidalgo, C= Jalisco, D= México, E= Michoacán, F= Puebla, G= Tlaxcala, H= Veracruz	70
Figura 2. Sesgos de categorías diamétricas: A= Guerrero, B= Hidalgo, C= Jalisco, D= México, E= Michoacán, F= Puebla, G= Tlaxcala, H= Veracruz	72
Figura 3. Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) de categorías diamétricas: A= Guerrero, B= Hidalgo, C= Jalisco, D= México, E= Michoacán, F= Puebla, G= Tlaxcala, H= Veracruz	74

CAPÍTULO IV

Figura 1. Diámetro relativo con altura relativa de las UMAFORES: A= 1203, B= 1303, C= 1404, D= 1406, E= 1410, F= 1503, G= 1507, H= 1508, I= 1510, J= 1604, K= 1605, L= 1607, M= 1608, N= 2101, O= 2105, P= 2108, Q= 2901, R= 2902, S= 3004, T= 3012	94
Figura 2. Volumen comercial vs residual: A= 1203, B= 1303, C= 1404, D= 1406, E= 1410, F= 1503, G= 1507, H= 1508, I= 1510, J= 1604, K= 1605, L= 1607, M= 1608, N= 2101, O= 2105, P= 2108, Q= 2901, R= 2902, S= 3004, T= 3012	105
Figura 3. Volumen acumulado a distintas alturas: A= 1203, B= 1303, C= 1404, D= 1406, E= 1410, F= 1503, G= 1507, H= 1508, I= 1510, J= 1604, K= 1605, L= 1607, M= 1608, N= 2101, O= 2105, P= 2108, Q= 2901, R=2902, S= 3004, T= 3012	108

CAPÍTULO V

Figura 1. Curvas de índice de sitio, donde: A=1303, B=1503, C=1507, D=1508, E=1509, F=1510, G=1604, H=1605, I=1607, J=2105, K=2901, L=2902.	134
Figura 2. Residuales vs predichos, donde: A=1303, B=1503, C=1507, D=1508, E=1509, F=1510, G=1604, H=1605, I=1607, J=2105, K=2901, L=2902	136

ÍNDICE DE CUADROS

CAPÍTULO I

Cuadro 1. Resumen de las variables dasométricas	14
Cuadro 2. Resumen de las variables descriptivas	16
Cuadro 3. Ecuaciones de relación altura diámetro locales	16
Cuadro 4. Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajustes locales.....	18

CAPÍTULO II

Cuadro 1. Resumen de las variables dasométricas	32
Cuadro 2. Valores de los estimadores de los parámetros	37
Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste del modelo.....	38

CAPÍTULO III

Cuadro 1. Resumen de las variables dasométricas	63
Cuadro 2. Ajustes de ecuaciones de volumen (vrta, vramas y vta)	65
Cuadro 3. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del Volumen rollo total árbol (Vrta)	67
Cuadro 4. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del Volumen de ramas (Vramas).....	68
Cuadro 5. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del Volumen total árbol (Vta)	68

CAPÍTULO IV

Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de las variables analizadas	90
Cuadro 2. Estimadores de los parámetros y bondad de ajuste	98

CAPÍTULO V

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos de las variables utilizadas	123
Cuadro 2. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de índice de sitio.....	131

INTRODUCCIÓN GENERAL

La necesidad de predecir el crecimiento, desarrollo y producción de la masa forestal, así como la respuesta silvícola, es uno de los objetivos principales para la investigación forestal, ya que para una correcta gestión forestal se requiere del conocimiento de las especies forestales (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015; Valencia-Manzo *et al.*, 2017). Las representaciones matemáticas son herramientas valiosas para los técnicos y silvicultores, al permitir predecir el desarrollo de los árboles (Attis Beltrán, Chauchard, & Martínez-Pastur, 2015; Hernández-Cuevas, Santiago-García, Santos-Posadas, Martínez-Antúnez, & Ruiz-Aquino, 2018). A través de ellas, se facilita la selección de las mejores alternativas de gestión forestal en función de los objetivos planteados, tomando en cuenta las consecuencias que puedan ocasionar las acciones hacia el bosque (Martínez-López *et al.*, 2019). Dada la gran evolución que ha tenido los sistemas de cómputo, se han logrado implementar diferentes herramientas en el sector forestal; lo que permite al investigador obtener información rápida y eficiente para su análisis, y tomar decisiones en base al objetivo planteado. Tal es el caso, de Vargas-Larreta *et al.* (2017) que generaron 6, 000 ecuaciones para 97 especies de bosques tropicales y templados de México con fines de dar un mejor manejo a los bosques de forma sustentable.

De esta manera, un sistema biométrico se caracteriza por incluir una serie de ecuaciones del ámbito forestal; para lo cual esta investigación está integrada por cinco capítulos, que a continuación se describen:

El capítulo uno, contiene información de altura-diametro de tipo local, donde la ecuación de Bates y Watts (1980) fue elegida para modelar árboles de 21 Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR) de ocho Estados de México (Guerrero, Hidalgo, Jalisco, Ciudad de México, Michoacán, Puebla, Tlaxcala y Veracruz) en forma conjunta, misma que fue publicada en la Revista Mexicana de Ciencias Forestales (2019). El capítulo dos, aborda este tema pero con una versión de efectos mixtos mediante el modelo Richards (1959) para 17 unidades de manejo en los Estados antes mencionados, con el propósito de tener una ecuación por

UMAFOR y a la vez minimizar los errores (residuales), ya que en el capítulo anterior no fue posible lograrlo a pesar de tener buena bondad de ajuste.

El capítulo tres aborda temas de ecuaciones de volumen rollo total árbol (vrta), volumen de ramas (vramas) y volumen total árbol (vta), en las que se seleccionó el modelo de Schumacher-Hall (1933) para describir datos de Jalisco, México y Puebla; mientras que para las entidades de Guerrero, Hidalgo, Michoacán, Tlaxcala y Veracruz se optó por la expresión de Spurr Potencial (1952), destacando que para estas dos últimas entidades, se excluyó el vramas al no tener suficiente información.

El capítulo cuatro incluye información de la descripción del perfil fustal y volumen, donde el modelo de Fang *et al.* (2000) mostró buenos resultados de forma numérica al explicar más del 97% de la varianza total y de forma gráfica para modelar datos de 20 unidades de manejo forestal; lo cual es respaldado por varios investigadores al recomendar su uso, por la excelente flexibilidad al estimar el volumen a distintas alturas.

Por último, el capítulo cinco hace referencia a las ecuaciones de calidad de sitio de 12 UMAFORES en cinco entidades federativas de México, mediante el modelo de Richards (1959) en versión EDAG o GADA (Enfoque de Diferencia Algebraica Generalizada) que fue capaz de modelar la información de análisis troncales, al permitir que la ecuación base sea expandida sobre el crecimiento, provocando que más de un parámetro dependa de la calidad de sitio, además de curvas dinámicas flexibles y con múltiples asíntotas.

ANTECEDENTES

La especie *Abies religiosa* Kunth Schltdl & Cham, es un árbol monoico que mide de 35 a 40 metros de altura (aunque puede encontrarse hasta de 60 m), con un diámetro normal de hasta 1.80 m.

Se distribuye entre las coordenadas geográficas 17° 30' a 20° 00' de latitud norte y los 97° 104' de longitud oeste. Se encuentra a una altitud entre 2800 a 3500 msnm y su condición óptima de crecimiento está en 3200 msnm. Crece en suelos de origen volcánico bien drenado con un Ph de 5 a 7 en clima húmedo la mayor

parte del año y alta precipitación, con una temperatura de 7 a 15 °C a menos 12 °C (Rzewdoski, 1978). Pineda-López, Ortega-Solís, Sánchez-Velásquez, Ortiz-Ceballos, y Vázquez-Domínguez (2013) señalan que los bosques de Oyamel se encuentran altamente fragmentados y amenazados por el cambio y uso de suelo. Vázquez-Bautista, Zamudio-Sánchez, Alvarado-Segura y Romo-Lozano (2016) en sus estudios de recopilación de modelos biométricos para distintas especies encontraron varios modelos para pino y encino principalmente, por lo que recomiendan generar modelos para *Abies* y otras especies de importancia económica, así como de verificar, validar y actualizar los modelos existentes. Diéguez-Aranda *et al.* (2009) describen que la modelización forestal se basa por un conocimiento estricto del sistema que se pretende modelar y de un conocimiento previo a lo que se desea obtener con alta precisión.

Las mediciones de diámetros y alturas de árboles individuales se aplican habitualmente en la mayoría de las situaciones de inventario forestal para obtener estimaciones del volumen para diferentes clases de dimensiones por unidad de superficie. Considerando que el diámetro se puede medir a bajo costo, las medidas de altura son mucho más difíciles y costosas de obtener. Como resultado, los volúmenes de árboles individuales se han estimado mediante la medición de todos los árboles en una parcela de diámetro y sub-muestreo para las alturas. Los datos de la altura de los árboles se utilizan para establecer una regresión de altura-diámetro, que, a su vez, se utiliza para estimar las alturas de los árboles para los que sólo se registraron valores de diámetro (Arabatzis & Burkhart, 1992).

De igual forma las expresiones matemáticas facilitan estimar el volumen en función de variables de un árbol fáciles de medir, tal como el diámetro normal (García-Cuevas, Herrera-Ávila, Hernández-Ramos, García-Magaña y Hernández Ramos, 2016). Las ecuaciones de volumen se derivan del volumen fustal parcial o total del árbol, incluyendo o no las ramas, con o sin corteza por medio de variables y parámetros de variables resultantes del diámetro a 1.30 m y la altura total (Vargas-Larreta *et al.*, 2017). En México hace unas décadas se mostró el interés y necesidad de elaborar ecuaciones de volumen para distintas especies

de regiones de bosques templados, selvas y regiones tropicales, sin embargo, parte de esas ecuaciones en la actualidad están obsoletas (Cruz-Cobos, Mendiá-Santana, Jiménez-Flores, Nájera-Luna y Cruz-García, 2016). El punto anterior se asocia con las ecuaciones de ahusamiento que son herramientas con que se recurre habitualmente para la clasificación de la madera según las necesidades (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). El ahusamiento se define como el rango o coeficiente de estrechamiento o disminución del diámetro en relación con el crecimiento en altura total del árbol (Gray, 1956). Se pueden caracterizar por funciones de ahusamiento las mediciones de diámetro tomadas en puntos sucesivos a lo largo del fuste (López-Martínez, 2013). Las funciones de ahusamiento se basan en el supuesto de que la forma del árbol varía continuamente a lo largo del fuste y es monótonicamente decreciente a medida que la distancia del tocón a la punta comercial se aproxima a la altura total (Lee, Seo, Son, Lee y Gadow, 2003).

Estas funciones se consideran la forma más flexible y precisa de obtener el volumen comercial de un árbol en pie (Clutter, Fortson, Pienaar, Brister y Bailey, 1983; Torres-Rojo, Magaña-Torres y Valles, 1993; Cruz-Cobos, Santos-Posadas y Valdez-Lizalde, 2008). Son adecuadas para los inventarios forestales ya que son flexibles y no presentan cruces ilógicos en las estimaciones conjuntas de volúmenes hasta diferentes diámetros límites de utilización comercial (Higuera, 1994).

Vargas-Larreta, Aguirre-Calderón, Corral-Rivas, Crecente-Campo, & Diéguez-Aranda (2013) mencionan que cuando una ecuación de volumen y su correspondiente ecuación de ahusamiento están definidas por los mismos parámetros y una estructura geométrica común, es posible definir un sistema compatible volumen-ahusamiento.

La importancia en los ecosistemas forestales radica en evaluar las condiciones de los bosques con el objetivo de tomar decisiones apropiadas para un posterior manejo, bajo este contexto se considera el término calidad de estación que por definición se describe como el potencial de producir madera de un área para un tipo de bosque o una sola especie (Clutter *et al.*, 1983).

Es decir, la calidad de estación muestra el nivel de productividad de un sitio forestal perteneciente a un microclima, en la que participan una serie de factores bióticos y abióticos (Quiñones-Barraza *et al.*, 2015). El concepto de calidad de estación juega un papel importante para definir o considerar el índice de sitio (IS) como la altura dominante (H_0) a una cierta edad base o de referencia. Naturalmente la H_0 se considera la altura promedio o media de los 100 árboles con mayor diámetro normal de una hectárea (ha) (Assmann, 1970; Quiñonez-Barraza, Zhao, Santos-Posadas, & Corral-Rivas, 2020). Según Cruz-Cobos, Santos-Posadas, & Valdez-Lizalde (2008) el crecimiento de los árboles en altura está correlacionado con la capacidad productiva del sitio, por lo que la altura dominante del rodal es la variable más usada para clasificar los sitios en base a la calidad de estación, aparte de ser una variable fácil de medir y de bajo costo (Diéguez- Aranda *et al.*, 2009).

OBJETIVO GENERAL

Generar un sistema biométrico forestal de aplicación nacional para *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. & Cham.

Objetivos específicos

- Desarrollar una ecuación altura-diámetro que permita estimar de forma precisa la altura de árboles de *Abies religiosa* en el centro y sur de México.
- Ajustar un modelo local no lineal de altura-diámetro con efectos mixtos para estimar la altura de árboles de *Abies religiosa* en distintas entidades federativas de México.
- Generar cuaciones para ocho entidades federativas de México que permita estimar de forma precisa el volumen maderable de *Abies religiosa*.
- Proponer un modelo compatible que permita estimar el volumen-ahusamiento de *Abies religiosa* en distintas unidades de manejo forestal de México.
- Analizar las curvas dinámicas de índice de sitio con la metodología GADA en 12 UMAFORES para *Abies religiosa* en distintas regiones de México.

BIBLIOGRAFÍA

- Arabatzis, A. A., & Burkhardt, H. E. (1992). An evaluation of sampling methods and model forms for estimating height–diameter relationships in loblolly pine plantations. *Forest Science*. 38, 192-198.
- Assmann, E. (1970). The principles of forest and yield study. Studies in the organic production, structure, increment and yield of forest stands. Ed. Pergamon Press. Oxford, UK.
- Attis Beltrán, H., Chauchard, L. M., & Martínez Pastur, G. (2015). Curvas preliminares de índice de sitio para bosques puros y mixtos de *Nothofagus alpina* y *Nothofagus obliqua* en la Patagonia Argentina. *Bosque (Valdivia)*, 36(2), 275-285.
- Bates, D. M. y Watts, D. G. (1980). Relative curvature measures of nonlinearity. *Journal of the Royal Statistical Society*, 42,1–16.
- Clutter, J.L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, G H., & Bailey, R. L. (1983). Timber management: a quantitative approach. Krieger Publishing Company, New York, USA.
- Cruz, Cobos. F., Santos-Posadas, H. M., & Valdez-Lizalde, J. R. (2008). Sistema compatible de ahusamiento–volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia* 42, 473–485.
- Cruz-Cobos, F., Santos-Posadas, H. M., & Valdez-Lazalde, J. R. (2008). Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia*, 42(4), 473-485.
- Cruz-Cobos, F., Mendía-Santana, R., Jiménez-Flores, A. A., Nájera-Luna, J. A., y Cruz-García, F. (2016). Ecuaciones de volumen para *Arbutus* spp. (madroño) en la región de Pueblo Nuevo, Durango. *Investigación y Ciencia*, 24(68), 41–47. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67448742006>.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F.,...Sánchez-Rodríguez, F. (2009). *Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*.

- Galicia: Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural, Xunta de Galicia.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F.,... Sánchez-Rodríguez, F. (2009). *Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Galicia: Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural, Xunta de Galicia.
- Fang, Z., Borders, B. E., y Bailey, R. L. (2000). Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science*, 46(1), 1-12.
- García-Cuevas, X., Herrera-Ávila, V., Hernández-Ramos, J., García-Magaña, J. J. y Hernández Ramos, J. (2016). Ecuaciones para predecir el diámetro normal en función del diámetro del tocón para *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. et Cham. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7, 95-103.
- Gray, H. R. (1956). The form and taper of forest- tree steins. Imperial Forest Institute, Oxford University. Oxford Inst. Pap. No 32. *Journal of the Science of food and Agriculture*, 7.
- Hernández-Cuevas, M., Santiago-García, W., Santos-Posadas, H. M., Martínez-Antúnez, P., & Ruiz-Aquino, F. (2018). Modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Agrociencia*, 52(3), 437-453.
- Higuera, C. (1994). *Funciones de volumen y ahusamiento para Roble (*Nothofagus obliqua*) y Hualo (*Nothofagus alessandri*)*. Tesis profesional, Facultad de Ciencias Forestales Universidad Austral de Chile Valdivia.
- Lee, W. K., Seo, J. H., Son, Y. M., Lee, K. H., y Von Gadow, K. (2003). Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. *Forest Ecology and Management*, 172(1), 69-77.
- López-Martínez, J. O., Vargas-Larreta, B., Aguirre-Calderón, O. A., Aguirre-Calderón, C. G., Macario-Mendoza, P. A., Martínez-Salvador, M., Álvarez-González, J. G. (2019). Compatible taper-volume systems for major tropical

- species in Mexico. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 93(1), 56-74. Doi:10.1093/forestry/cpz033.
- López-Martínez, J.C. (2013). *Modelos de ahusamiento y volumen comercial para Pinus oocarpa y P. douglasiana en la región de Pueblo Nuevo, Durango*. Tesis de maestría, Instituto Tecnológico de El Salto, Durango.
- Pineda-López, M. R., Ortega-Solis, R., Sánchez-Velásquez, L. R., Ortiz-Ceballos, G., & Vázquez-Domínguez. (2013). Estructura poblacional de *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. et Cham., en el ejido el conejo del parque nacional cofre de perote, Veracruz, México. *Chapingo Seria Ciencias Forestales y del Ambiente*, 376-385. doi: 10.5154/r.rchscfa.2012.11.058.
- Quiñonez-Barraza, G., Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439-454.
- Quiñonez-Barraza, G., Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439-454.
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10, 290-300.
- Rzewdoski, J. (1978). Vegetación de México. 1er edición digital. Comisión Nacional para el Conocimiento y Uso de la Biodiversidad, México.
- Schumacher, F. X. y Hall, F. S. (1933). Logarithmic expression of timbertree volume. *Journal Agriculture Research*, 47(9), 719-734. Recuperado de: <https://ci.nii.ac.jp/naid/10029733560/>.
- Spurr, S. H. (1952). Forest inventory. John Wiley and sons. New York. 476 pp.
- Torres-Rojo, J. M., Magaña-Torres, S. O., & Valles-G, G. A. (1993). Funciones de ahusamiento para 8 especies Forestales del Estado de México. *I Congreso Mexicano de Recursos Forestales*. Llevado a cabo por la Sociedad Mexicana de Recursos Forestales, Saltillo, Coahuila. México.

- Valencia-Manzo, S., Trujillo-Gómez, S. A., Cornejo-Oviedo, E. H., Flores-López, C., Díaz-Balderas, J. A. y González-López, H. D. (2017). Ecuación de pressler para estimar volumen de fuste en árboles de *Pinus patula* Schl. et Cham. var. *longepedunculata* Look. *Foresta Veracruzana*, 19(1), 29-34. Disponible en: Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49752128005>.
- Vargas-Larreta, B., Aguirre-Calderón, O. A., Corral-Rivas, J. J., Crecente-Campo, F., & Diéguez-Aranda, U. (2013). Modelo de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el noreste de México. *Agrociencia*, 47(1), 91-106.
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J., Aguirre-Calderon, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455. DOI:10.5154/r.rchscfa.2017.06.040.
- Vásquez-Bautista, N., Zamudio-Sánchez, F. J., Alvarado-Segura, A., & Romo-Lozano, (2016). *Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 22(3), 352-367. doi: 10.5154/r.rchscfa.2015.09.043.

CAPÍTULO I. RELACIÓN ALTURA-DIÁMETRO PARA *Abies religiosa* KUNTH SCHLTDL. & CHAM. EN EL CENTRO Y SUR DE MÉXICO

Artículo

HEIGHT-DIAMETER RELATION FOR *Abies religiosa* KUNTH SCHLTDL. & CHAM. IN THE CENTER AND SOUTH OF THE COUNTRY

Juan Carlos Guzmán Santiago¹, Oscar Alberto Aguirre Calderón^{1*}, Marco Aurelio González Tagle¹, Eduardo Javier Treviño Garza¹, Javier Jimenez Perez¹, Benedicto Vargas Larreta² y Héctor Manuel de los Santos Posadas³.

1. RESUMEN

La altura total de los árboles es una variable importante en silvicultura y manejo forestal; sin embargo, su medición en campo es relativamente difícil y costosa. El objetivo de la presente investigación fue desarrollar una ecuación altura-diámetro que permita estimar de forma precisa la altura de árboles de *Abies religiosa* en el centro y sur de México. Para el ajuste de ecuaciones locales se utilizó un tamaño de muestra de 2 747 datos, que son suficientes para describir el comportamiento de las curvas sobre la variabilidad natural de la altura total de los individuos. Para la selección del mejor modelo se fijaron los siguientes criterios: coeficiente de determinación ajustada, sesgo, error medio; así como, el análisis gráfico y numérico de los residuales. La explicación de las variables independientes de cada modelo fue altamente aceptable, ya que todos fueron superiores ($R^2_{adj}=0.96$), además de presentar errores (REMC) por debajo de 0.44 metros y con sesgos cercanos a cero. Aunado a lo anterior, el modelo de Bates y Watts fue seleccionado mediante el análisis gráfico. Este tipo de ecuación es aplicable

en las diferentes unidades de manejo forestal del país para trabajos de inventarios forestales; ya que reduce el tiempo, el costo y, a su vez, minimizan los errores de campo.

Palabras clave: *Abies religiosa*, altura total, ecuaciones locales, manejo forestal, modelo Bates y Watts, relación altura-diámetro.

ABSTRACT

The total height of the trees is an important variable in forestry and forest management; however, its measurement in the field is difficult and expensive. The goal of this research was to develop a height-diameter equation that can accurately estimate the height of *Abies religiosa* trees in the center and south of the country. The local equations were adjusted using a sample size of 2 747 data, which are sufficient to describe the behavior of the curves on the natural variability of the total height of the trees. For the selection of the best model, the following criteria were established: adjusted coefficient of determination, bias, mean error, and graphical and numerical analyses of waste. The explanation of the independent variables of each model was highly acceptable, since they were all superior ($R^2_{adj} = 0.96$), in addition to presenting errors (RMSE) below 0.44 meters and with near-zero biases. Combined with the above, the model of Bates and Watts was selected through graphical analysis. This type of equation can be applied to the different forest management units (Umafores) of the country for forest inventory purposes, since it reduces the time and cost while minimizing field errors.

Keywords: *Abies religiosa*, total height, local equations, forest management, model of Bates and Watts, height-diameter ratio.

Fecha de recepción/Reception date: 27 de diciembre de 2018

Fecha de aceptación/Acceptance date: 19 de febrero de 2019

2. INTRODUCCIÓN

Abies religiosa (Kunth) Schltdl. & Cham. Es una especie con importancia económica, ambiental y ecológica dentro su hábitat natural. Por lo tanto, se considera trascendente contar con información relevante que contribuya en su manejo, crecimiento y desarrollo de la especie (Vargas-Larreta *et al.*, 2017). Aunado a esto, distintas instituciones han colaborado y mostrado interés por desarrollar investigaciones en las regiones de México con el objetivo de generar herramientas prácticas, tales como los modelos biométricos para apoyar a los técnicos forestales en la obtención de mejores estimaciones de los rendimientos maderables de sus bosques (Vargas-Larreta *et al.*, 2017); así como, para la toma de decisiones sobre el manejo (Diamantopoulou y Özçelik, 2012; García-Cuevas, Herrera-Ávila, Hernández-Ramos, García-Magaña y Hernández Ramos, 2016; Vargas-Larreta *et al.*, 2017).

La relación altura-diámetro se utiliza, principalmente, para caracterizar la estructura vertical de las masas forestales; es decir, simula el crecimiento forestal (Burkhardt y Strub, 1974; Wykoff, Crookston y Stage 1982; Larsen y Hann, 1987; Hernández-Ramos *et al.*, 2018a), estima el volumen de los árboles individuales o de la masa y determina la altura dominante con el propósito de evaluar la calidad de la estación (Huang, Titus y Wiens 1992). Su conocimiento es importante también en otros contextos, los cuales incluyen la estimación de biomasa forestal, simulación de la dinámica de masas forestales y el análisis de las bases teóricas del crecimiento de árboles (Canham, Finzi, Pacala y Burbank, 1994).

Por las diversas condiciones que prevalecen en los ecosistemas de México, en su mayoría se observan masas heterogéneas, por lo que es difícil utilizar una sola ecuación de altura-diámetro para todas las especies. Sin embargo, pueden ajustarse para cada árbol de una determinada especie o rodal (Arias, 2004), tanto a nivel local como generalizado; las primeras estiman la altura a partir únicamente del diámetro normal, mientras que en las segundas se consideran el diámetro normal y algunas variables del rodal (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009). Bajo esta

perspectiva, el objetivo de la presente investigación fue desarrollar una ecuación altura-diámetro que permita estimar de forma precisa la altura total de los árboles de *Abies religiosa* en el centro y sur del país.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Área de estudio

El área de estudio contiene información de 21 unidades de manejo forestal (Umafores), las cuales comprenden ocho estados: Guerrero (1203), Puebla (2101, 2105 y 2108), Tlaxcala (2901 y 2902), Veracruz (3004, 3012), Michoacán (1604, 1605, 1607 y 1608), Jalisco (1404, 1406 y 1410), Hidalgo (1303) y Estado de México (1503, 1507, 1508, 1509 y 1510) (Inegi, 2016). En el Cuadro 1 se describen algunas de las características biofísicas de las principales regiones (Umafores); en el cual se observa que las condiciones de desarrollo de *Abies religiosa* son prácticamente similares (suelo, clima y vegetación).

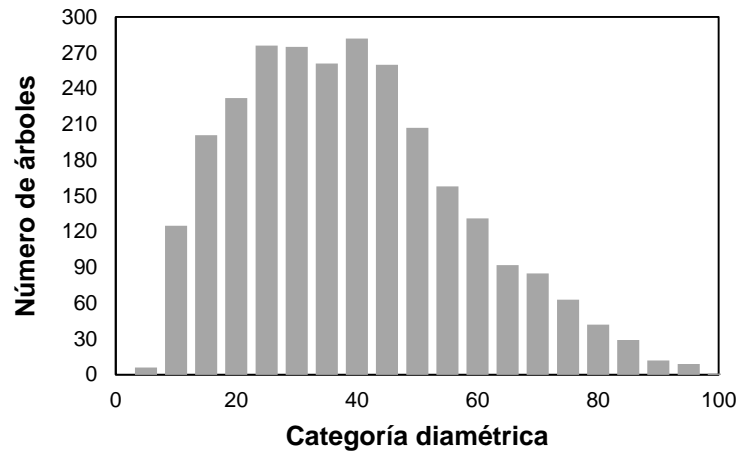
Cuadro 1. Resumen de las variables dasométricas

UMAFORES	Altitud (MSNM)	Clima	Tipo de suelo	Tipo de vegetación
1203	0 a 2037	Cálido subhúmedo con lluvias en verano (A(w)), Semicálido húmedo con abundantes lluvias en verano (ACm), Semicálido subhúmedo con lluvias en verano (ACw), Templado húmedo con abundantes lluvias en verano (C(m))	Arenosol (AR), Calcisol (CL), Cambisol (CM), Leptosol (LP), Luvisol (LV), Phaeozem (PH), Regosol (RG), Otros.	Pastizal, Bosque, Selva, Agricultura, Otros
2101, 2105, 2108	130 a 2829			
2901, 2902	2200 a 2738			
3004, 3012	0 a 2420			
1604, 1605, 1607, 1608	10 a 2595			
1404, 1406, 1410	29 a 2347			
1303	137 a 2712			
1503, 1507, 1508, 1509, 1510	1126 a 2808			

Fuente: INEGI, 2016.

3.2 Tamaño de muestra

En la Figura 1 se muestra la distribución de los datos diamétricos empleados para la estimación de la relación altura-diámetro; se evidencia que cumple con el supuesto de normalidad en su distribución.



Figuras 1. Distribución de las categorías diamétricas

Para la recopilación de información dasométrica se realizaron muestreos aleatorios no mayores a 150 árboles en zonas de aprovechamiento, así como en algunas áreas no autorizadas. Para el primer caso, se utilizó el muestreo destructivo que consistió en derribar, seccionar y medir los individuos, que se eligieron mediante un muestreo dirigido considerando las diferentes categorías diamétricas. Mientras que para las áreas no autorizadas, las mediciones se hicieron de manera escalonada, con forcípula láser *Haglof Digitech Professional* para medir el diámetro a distintas alturas. En todas las Umafores, el diámetro normal (dn), fue medido en pie con una cinta diamétrica alemana *Forestry Suppliers, Inc. P.O.BOX 8397* y forcípulas *Haglof Mantax Blue*, medio a 1.30 sobre el nivel del suelo; y la altura total (At) con la pistola *Haga®* (Cuadro 2), salvo para aquellos ejemplares derribados en los que se usó un flexómetro Uline Accuc-Lock H-1766.

Cuadro 2. Resumen de las variables descriptivas

No de árboles	Variables	Media	Máximo	Mínimo	Desviación estándar
2747	Dn	39.07	99	5.40	18.55
	At	24.64	52.45	5.30	9.05

3.3 Modelos ajustados

En una primera fase se ajustaron 10 ecuaciones locales no lineales, las cuales han sido utilizadas para describir la relación altura-diámetro en numerosos estudios (Huang *et al.*, 1992; Fang y Bailey, 1998; Peng, 1999), y la diferencia entre ellos radica en los números de parámetros (Cuadro 3). Las ecuaciones se seleccionaron mediante un minucioso análisis gráfico, debido a que todas presentaron estadísticos aceptables.

Cuadro 3. Ecuaciones de relación altura diámetro locales

Referencias	Expresión	Ecuación
Bates and Watts (1980)	$At = 1.3 + b_0 * \left(\frac{Dn}{b_1 + Dn} \right)$	1
Stage (1975)	$At = 1.3 + b_0 * Dn^{b_1}$	2
Larson (1986)	$At = 10^{b_0 * Dn^{b_1}}$	3
Wykoff <i>et al.</i> (1982)	$At = 1.3 + \exp \left(b_0 + \frac{b_1}{Dn + 1} \right)$	4
Richards (1959)	$At = 1.3 + b_0 * [1 - \exp(-b_1 * Dn)]^{b_2}$	5
Hossfeld (1822)	$At = 1.3 + \frac{Dn^2}{b_0 + b_1 * Dn + b_2 * Dn^2}$	6
Loetsch <i>et al.</i> (1973)	$At = \frac{Dn^2}{b_0 + b_1 * Dn^2}$	7
Burkhart and Strub (1974)	$At = 1.3 + b_0 * \exp \left(\frac{b_1}{Dn} \right)$	8
Weibull (1951)	$At = 1.3 + b_0 * [1 - \exp(-b_1 * Dn^{b_2})]$	9
Meyer (1940)	$At = 1.3 + b_0 * [1 - \exp(-b_1 * Dn)]$	10

Donde: At = altura total (m), Dn = diámetro a la altura de 1.3 m (cm), b_i = parámetros a ser estimados ($i = 0, 1, 2$).

3.4 Método de ajuste y selección de modelos

Los modelos ajustados fueron de tipo no lineal, ya que estas ecuaciones tienen un comportamiento más consistente desde el punto de vista biológico, lo que permite capturar con mayor precisión las relaciones altura-diámetro en términos de su capacidad predictiva (Huang *et al.*, 1992; Diamantopoulou y Özçelik, 2012). Para la estimación de los parámetros se usó el método de mínimos cuadrados ordinarios (MMCO); porque minimiza los errores de los parámetros. Para evitar la convergencia de estos a un óptimo local, se utilizaron los valores obtenidos por otros autores en trabajos similares. Las ecuaciones fueron ajustadas en el programa R (R Core Team, 2017).

El análisis de la bondad de ajuste de los modelos se basó en comparaciones numéricas y gráficas. A partir de los residuos obtenidos en la fase de ajuste, se calcularon los siguientes estadísticos para la comparación y selección de los mejores modelos: el coeficiente de determinación ajustado (R^2_{adj}); en el cual es deseable que los valores obtenidos alcancen el valor de 1; mientras que, la Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) tiende a cero. El sesgo (\bar{e}) busca que el promedio de los residuales sea igual a cero, con lo que se logra que el estimador sea centrado o insesgado (Amat-Rodrigo, 2016).

La expresión de los estadísticos de bondad de ajuste es la siguiente:

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left[\frac{n-1}{n-p-1} \right] \quad 21$$

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}} \quad 22$$

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)}{n} \quad 23$$

donde: p = número de parámetros a estimar, n = es el tamaño de muestra, \ln = logaritmo natural, Y_i = valores observados, \hat{Y}_i = valores predichos, \bar{Y}_i = valores promedio.

Además, se hizo un análisis gráfico de los residuos frente a los valores predichos de altura total; este procedimiento se considera una de las maneras más eficientes de evaluar la capacidad de ajuste de un modelo (Diéguez-Aranda, Barrio-Anta, Castedo-Dorado y Álvarez-González, 2005), ya que detecta posibles tendencias sistemáticas de los datos, así como para seleccionar factores de ponderación si fuesen necesarios, debido a la presencia de heterocedasticidad (Neter *et al.*, 1996).

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Ecuaciones altura-diámetro seleccionadas

En el Cuadro 4 se resumen los valores de los parámetros estimados, y los estadísticos de ajuste de los modelos. Los estimadores de los parámetros locales resultaron diferentes a cero ($P < 0.0001$) con un nivel de confiabilidad de 95 % (Quiñones-Barraza *et al.*, 2018). Todas las ecuaciones garantizaron una óptima confianza, ya que presentaron errores menores a 1.667 metros (REMC) y coeficientes de determinación ajustados (R^2_{adj}) superiores a 0.96. De igual forma, todos los modelos registraron sesgos bajos; los modelos 1, 2, 3, 5 y 9 tuvieron sesgos negativos, lo que significa que sobreestiman ligeramente la información; mientras que con el resto de las ecuaciones se obtuvieron sesgos con valores positivos, que tienden a subestimar la altura total de forma aceptable, lo cual cumple la propiedad estadística (Amat-Rodrigo, 2016). Bajo esta perspectiva se seleccionaron las ecuaciones 1 y 4.

Cuadro 4. Parámetros estimados y estadísticos de bondad de ajustes locales

Parámetros	Estimador	EE	T	P>t	Sesgo	REMC	R^2_{adj}	Ec
b_0	119.8798	0.4630	258.41	<0.0001	-0.030	0.44	0.99	1
b_1	154.2599	0.7890	195.49	<0.0001				
b_0	1.3407	0.0070	176.24	<0.0001	-0.054	0.77	0.99	2
b_1	0.7854	0.0010	540.44	<0.0001				
b_0	0.216	0.0020	104.92	<0.0001	-0.040	0.68	0.99	3
b_1	0.7449	0.0010	611.36	<0.0001				
b_0	4.019	0.0030	1286.01	<0.0001	0.195	1.53	0.97	4
b_1	-31.1899	0.1330	-234.01	<0.0001				

b ₀	63.1847	0.3380	186.48	<0.0001				
b ₁	0.0135	0.0001	92.81	<0.0001	-0.001	0.39	0.99	5
b ₂	1.0709	0.0030	284.57	<0.0001				
b ₀	-0.0547	0.0630	-0.87	0.3868*				
b ₁	1.3678	0.0030	439.32	<0.0001	0.004	0.40	0.99	6
b ₂	-0.0028	0.00001	-153.17	<0.0001				
b ₀	2.8883	0.0070	372.75	<0.0001	0.123	0.94	0.98	7
b ₁	0.121	0.0001	716.11	<0.0001				
b ₀	54.3213	0.1800	301.47	<0.0001	0.221	1.66	0.96	8
b₁	-29.3301	0.1370	-213.48	<0.0001				
b ₀	70.5523	0.2130	331.30	<0.0001	-0.023	0.41	0.99	9
b ₁	0.0107	0.00004	249.38	<0.0001				
b ₀	61.7464	0.3740	164.95	<0.0001				
b ₁	0.0104	0.00004	238.19	<0.0001	0.001	0.39	0.99	10
b ₂	1.0568	0.0020	373.19	<0.0001				

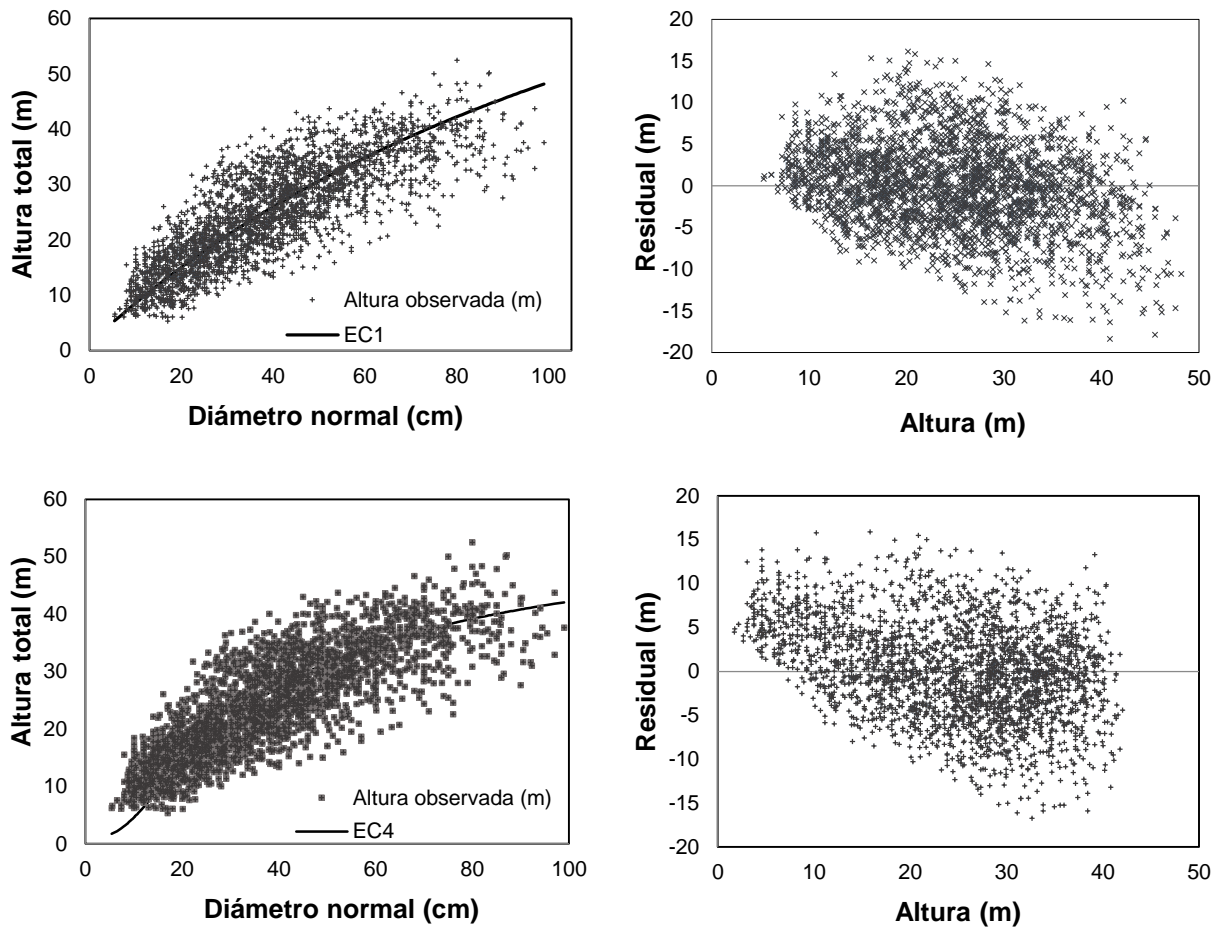
*Nota: el estimador de parámetro b₀ no es significativo (p>0.05)

4.2 Comparación de las ecuaciones altura-diámetro seleccionadas

En la figura 2 se muestran las curvas de ajuste de las ecuaciones locales sobrepuestas a los datos observados, con la finalidad de explicar el motivo de su selección. A pesar de que los estadísticos acompañaron a las ecuaciones de forma adecuada, no todas exhibieron una buena representación gráfica. Motivo por el cual se realizó un análisis detallado de las gráficas para hacer una buena selección. Las ecuaciones 1 y 4 marcaron una notoria diferencia (Rodríguez-Carrillo, Cruz-Cobos, Vargas-Larreta y Hernández, 2015); para el primer caso las estimaciones en altura son biológicamente plausibles, a partir de la categoría de 5 cm en adelante. Además, las alturas predichas tienden a cero, conforme el diámetro normal disminuye (Diéguez-Aranda *et al.*, 2005; Missanjo y Mwale, 2014); independientemente que en la práctica no es importante, ya que en los inventarios se consideran árboles con medidas comerciales (Puji, 2014).

La curva del modelo 4 no presentó un comportamiento lógico para diámetros menores a 15 cm; aunque en diámetros de 20 a 70 cm tiene un comportamiento aceptable, mientras que en categorías mayores pierde la consistencia en la predicción. Además, en la gráfica de residuos se visualiza que no siguen una

distribución normal. Ante eso, es evidente que la bondad de ajustes no es la única opción para seleccionar las mejores ecuaciones (Diéguez-Aranda *et al.*, 2005).



Figuras 2. Altura estimada por las ecuaciones (1 y 4) (Izquierda) y residuales (derecha)

A pesar de que la curva se sobrepone de manera adecuada sobre los datos observados, se observa en los residuales que existe un marcado margen de error en altura. Este tipo de problemas se presenta, frecuentemente, en regiones donde el bosque es muy denso, debido a que los árboles están en plena competencia en crecimiento, y, por consecuencia, no se refleja un notorio incremento en diámetro. Aunado a lo anterior, dichas ecuaciones están diseñadas para estimar diámetros mayores o aproximados a la altura; es decir, cuando el árbol alcanza una altura de 1.30 m, el diámetro debe de ser cero (Puji, 2014).

Los resultados obtenidos por López-Sánchez *et al.* (2003), Barrio-Anta, Álvarez-González, Díaz-Maroto y López-Sánchez, (2004) y Crecente-Campo *et al.* (2013) en distintas especies respaldan la información del presente estudio; ya que en los gráficos de residuales también muestran un margen de error, que probablemente son árboles que provienen de áreas con alta densidad en competencias de crecimiento.

La ecuación local de Bates y Watts (1980) resultó de la siguiente manera:

$$At = 1.3 + 119.8798 * \left(\frac{Dn}{154.2599 + Dn} \right), \text{ su aplicación es apropiada en inventarios con}$$

rodas forestales en diferentes regiones del país, o en un futuro para plantaciones. Cabe mencionar que, para su aplicación basta con medir una pequeña muestra de 25 árboles y que posteriormente se puede extrapolar a las áreas de interés, lo cual facilita el trabajo de campo (Arias, 2004; Diéguez-Aranda *et al.*, 2009; Hernández-Ramos *et al.*, 2018b).

Diversos estudios señalan que, a pesar de las características homogéneas de las áreas forestales un modelo de altura-diámetro (h-d) local o simple, usualmente, no es suficiente para describir todas las posibles relaciones dentro de un rodal, debido a que las curvas de altura no son constantes (Fang y Bailey, 1998; López-Sánchez *et al.*, 2003; Castedo-Dorado, Diéguez-Aranda, Barrio-Anta, Sánchez-Rodríguez, y Gadow, 2006; Trincado y Leal, 2006; Vargas-Larreta, Castedo-Dorado, Álvarez-González, Barrio-Anta y Cruz-Cobos, 2009; Feldpausch *et al.*, 2011; Ahmadi y Alavi, 2016). Sin embargo, los resultados obtenidos muestran que sí es posible, ya que en ocasiones una ecuación (h-d) local puede aplicarse para una o varias especies en distintas regiones del mundo (Landsberg y Waring, 1997; Landsberg, Johnsen, Albaugh, Allen, y McKeand, 2001; Puji, 2014; Arnoni-Costa, Schroder y Guimarães-Finger, 2016), aunque no son muy comunes (Salas, Timothy, Gregoire, Craven y Gilabert, 2016).

Por otra parte, López-Villegas *et al.* (2017) indican mejores ajustes con las ecuaciones locales en varias especies estudiadas, ya que los rodales o unidades de manejo tienen cierto grado de homogeneidad y los datos consideran de manera implícita la calidad del sitio; mientras que en las ecuaciones globales no

sucede lo mismo, lo que genera mayor variabilidad y en consecuencia un ajuste menor.

5. CONCLUSIONES

Las ecuaciones ajustadas no presentan diferencias en la bondad de ajuste, motivo por el cual se realizó un análisis gráfico para seleccionar la ecuación apropiada para las estimaciones de alturas. El modelo propuesto se podrá usar para describir la relación altura-diámetro en inventarios forestales de las diferentes Umafores del país; lo cual facilitará el trabajo, reducirá el costo, tiempo y por ende minimizará errores en la toma de información.

En consecuencia, el modelo se podrá sumar a las ecuaciones de crecimiento para hacer estimaciones de volumen maderable existente. Es la primera ecuación de este tipo que se desarrolla para *Abies religiosa* en distintas regiones del país, dado que en el sistema biométrico nacional no incluye ese tipo de modelo.

Agradecimientos

Los autores agradecen al coordinador del proyecto, denominado Desarrollo de un sistema biométrico para la planeación del manejo forestal sustentable de los ecosistemas con potencial maderable en México, dirigido por Dr. Benedicto Vargas Larreta, investigador titular del Instituto Tecnológico de El Salto, Durango, por facilitar la información de campo. De igual forma se le agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo económico en la etapa de formación académica.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflicto de intereses

Contribución por autor

Juan Carlos Guzmán Santiago: planeación, levantamiento de datos en campo, análisis de la información y redacción del texto; Oscar Alberto Aguirre Calderón,

Marco Aurelio González Tagle, Eduardo Javier Treviño Garza y Javier Jiménez Pérez: planeación, análisis de la información y revisión del documento; Benedicto Vargas Larreta: análisis estadístico de la información; Héctor Manuel De los Santos Posadas: planeación de la investigación y revisión del manuscrito.

6. REFERENCIAS

- Ahmadi, K. y Alavi, S.J. (2016). Generalized height-diameter models for *Fagus orientalis* Lipsky in Hyrcanian forest, Iran. *Journal of forest science*, 62(9), 413–421. DOI: 10.17221/51/2016-JFS.
- Arias, D. (2004). Estudio de las relaciones altura-diámetro para seis especies maderables utilizadas en programas de reforestación en la Zona Sur de Costa Rica. *Revista Forestal Kurú*, 1(2), 2-11.
- Amat-Rodrigo, J. (2016). Selección de predictores y mejor modelo lineal múltiple. RPubS. Madrid, España. 83 p.
- Arnoni-Costa, E., Schroder, T. y Guimarães-Finger, C.A. (2016). Height-diameter relationships for *Araucaria angustifolia* (Bertol.) Kuntze in southern Brazil *Cerne*, 22(4), 493-500. DOI: 10.1590/01047760201622042182.
- Barrio-Anta, M., Álvarez-González, J. G., Díaz-Maroto, I. J. y López-Sánchez, C. A. (2004). Relación altura-diámetro generalizada para *Quercus robur* L. en Galicia. *Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales*, 18(1), 141-146.
- Bates, D. M. y Watts, D. G. (1980). Relative curvature measures of nonlinearity. *Journal of the Royal Statistical Society*, 42,1–16.
- Burkhardt, H. E. y Strub, M. R., (1974). A model for simulation of planted loblolly pine stands. In Fries, J. (Ed). Growth models for tree and stand simulation. Stockholm: *Royal College of Forestry*, 128-135.
- Canham, C. D., Finzi, A. C., Pacala, S. W. y Burbank, D. H., (1994). Causes and consequences of resource heterogeneity in forests: interspecific variation in light transmission by canopy trees. *Canadian Journal of Forest Research*, 24, 337-349.

- Castedo-Dorado, F., Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Sánchez-Rodríguez, M. y Gadow, K. (2006). A generalized height–diameter model including random components for radiata pine plantations in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*, 229, 202-213.
- Crecente-Campo, F., Corral-Rivas, J., Vargas-Larreta, B. y Wehenkel, C. (2013). Can random components explain differences in the height–diameter relationship in mixed uneven-aged stands? *Annals of Forest Science*, 71(1), 51-70. DOI 10.1007/s13595-013-0332-6.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., ... Sánchez-Rodríguez, F. (2009). *Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural. Galicia, España. 273 p.
- Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Castedo-Dorado, F. y Álvarez-González, J. (2005). Relación altura-diámetro generalizada para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de repoblación en el noroeste de España. *Forest Systems*, 14(2), 229-241.
- Diamantopoulou, M. J. y Özçelik, R. (2012). Evaluation of different Modeling approaches for total tree-height estimation in Mediterranean Region of Turkey. *Forest Systems*, 21(3), 383-397.
- Fang, Z. y Bailey, R. L. (1998). Height-diameter models for tropical forests on Hainan Island in southern China. *Forest Ecology and Management*, 110, 315-327.
- Feldpausch, T. R., Banin, L., Phillips, O. L., Baker, T. R., Lewis, S.L., Quesada, C. A., ... y Lloyd, J. (2011). Height-diameter allometry of tropical forest trees. *Biogeosciences*, 8, 1081–1106. DOI:10.5194/bg-8-1081-2011.
- García-Cuevas, X., Herrera-Ávila, V., Hernández-Ramos, J., García-Magaña, J. J. y Hernández Ramos, J. (2016). Ecuaciones para predecir el diámetro normal en función del diámetro del tocón para *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. et Cham. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 7, 95-103.

- Hernández-Ramos., García-Cuevas, X., Hernández-Ramos, A., García- Magaña, J., Muñoz-Flores, H., Flores-López, C., García-Espinoza, G. (2018a). Ecuaciones altura-diámetro generalizadas para *Pinus teocote* Schlecht. & Cham. en el estado Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 6(31), 8-21. DOI:<https://doi.org/https://doi.org/10.29298/rmcf.v6i31.192>.
- Hernández-Ramos, J., García-Magaña, J. J., Hernández-Ramos, A., García-Cuevas, X., García-Espinoza, G., Muñoz-Flores, H. J., Sáenz-Reyes, J. T. (2018b). Allometric height-diameter equations for *Pinus pseudostrobus* Lindl. *Ecosistemas y Recursos Agropecuarios*, 5(13) ,15-23. DOI: 10.19136/era.a5n13.1131.
- Hossfeld, J. W. (1822). *Mathematik für Forstmänner, Ökonomen und Cameralisten*. 4th edition. Hennings, Gotha, Deutschland. 472 p.
- Huang, S., Titus, S. y Wiens, D. (1992). Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 22, 1297-1304.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi). (2016). Compendio de información geográfica www.internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/Productos/...2016/702825087357.pdf (9 de octubre de 2018).
- Landsberg, J. J. y Waring, R. H. (1997). A generalized model of forest productivity using simplified concepts of radiation-use efficiency, carbon balance and partitioning. *Forest Ecology and Management*, 95(3), 209-228.
- Landsberg, J. J., Johnsen, K. H., Albaugh, T. J., Allen, H. L. y S. E. McKeand, S. E. (2001). Applying 3-PG, a simple process-based model designed to produce practical results, to data from loblolly pine experiments. *Forest Science*, 47(1), 43-51.
- Larsen, D. R. y Hann, D. W. (1987). Height-diameter equations for seventeen tree species in southwest Oregon. Forest Research Laboratory. Oregon State University. Research Bulletin 49. Corvallis, OR USA. 16 p.
- Larson, B. C. (1986). Development and growth of even-aged stands of Douglas-fir and grand fir. *Canadian Journal of Forest Research*, 16, 367-372.

- Loetsch, F., Zoehrer, F. y Haller, K. E. (1973). *Forest inventory*. Vol. 2. Editorial BLV. Verlagsgesellschaft, München, Germany. 469 p.
- López-Sánchez, C. A., Gorgoso-Varela, J., Castedo-Dorado, F., Rojo-Alboreca, A., Rodríguez-Soalleiro, R., Álvarez-González, J. y F. Sánchez-Rodríguez, F. (2003). A height-diameter model for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Annals of forest science*, 60(3), 237-245. DOI: 10.1051/forest: 2003015.
- López-Villegas, M. F., Santiago-García, W., Quiñonez-Barraza, G., Suárez-Mota, M. E., Santiago-Juárez, W. y Santiago-García, E. (2017). Ecuaciones globales y locales de altura-diámetro de 12 especies de interés comercial en bosques manejados. *Revista Mexicana de Agroecosistemas*, 4(2), 113-126.
- Meyer, H. A. (1940). A mathematical expression for height curves. *Journal Forest*, 38,415-420.
- Missanjo, E. y G. Mwale, G. (2014). A mixed-effects height-diameter model for *Pinus kesiya* in Malawi. *Journal of biodiversity management and forestry*, 3(2), 3-7. DOI.org/10.4172/2327-4417.1000124.
- Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., y Wasserman, W. (1996). *Applied Linear Statistical Models*. 4th edition. McGraw-Hill. New York, NY USA. [https://www.scirp.org/\(S\(czeh2tfqyw2orz553k1w0r45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1143469](https://www.scirp.org/(S(czeh2tfqyw2orz553k1w0r45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1143469) (12 de enero de 2019).
- Peng, C. H. (1999). Nonlinear Height-diameter Models for Nine Boreal Forest Tree Species in Ontario. Forest Research Report No. 155. Ontario Forest Research Institute, Ontario Ministry of Natural Resources. Ontario, Canada. 28 p.
- Puji, N. N. (2014). Relationship between total tree height and diameter at breast height for tropical peat swamp forest tree species in Rokan Hilir district, Riau province. *Indonesian Journal of Forestry Research* 1, 89-107.
- Quiñonez-Barraza, G., Zhao, D., Santos-Posadas, H. M., Santiago-García, W., Tamarit-Uriás, J. C. y Nájera-Luna, J. A. (2018). Compatible taper, volume, green weight, biomass and carbon concentration system for *Quercus*

- sideroxyla* Bonpl. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 25(1), 49-69. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2018.06.050.
- R Core Team, R. (2017). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. 3475 p.
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10:290-300.
- Rodríguez-Carrillo, A., Cruz-Cobos, F., Vargas-Larreta, B. y F. J. Hernández, F. J. (2015). Compatible dominant height-site index model for juniper (*Juniperus deppeana* Steud.). *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(1), 97–108. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2014.09.041.
- Salas, C., Timothy, T., Gregoire, G., Craven, J. y Gilabert, H. (2016). *Modelación del crecimiento de bosques: estado del arte*. *Bosque*, 37(1), 3-12. DOI: 10.4067/S0717-92002016000100001.
- Stage, A. R. (1975). Prediction of height increment for models of forest growth. USDA Forest Service Research Paper INT-164. Ogden, UT USA. 20 p.
- Trincado, G. y Leal, C. (2006). Ecuaciones locales y generalizadas de altura-diámetro para pino radiata (*Pinus radiata*). *Bosque* 27, 23-34. DOI:10.4067/S0717-92002006000100003.
- Vargas-Larreta, B., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., M. Barrio-Anta, M. y Cruz-Cobos, F. (2009). Modelo altura-diámetro con coeficientes aleatorios para los bosques de Durango. *Forestry*, 82(4), 447-462. DOI:10.1093/forestry/cpp016.
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J., Aguirre-Calderon, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F.J., Treviño-Garza, E. J., Martínez-Salvador, M. y Aguirre-Calderon, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455. DOI: <http://dx.doi.org/10.5154/r.rchscfa.2017.06.040>.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal Applied Mechanics*, 18,293–297.

Wykoff, W. R., Crookston, C. L. y Stage, A. R. (1982). User's guide to the stand prognosis model. USDA Forest Service. General Technical Report INT-133. Intermountain Forest and Range Experiment Station. Ogden, UT USA. 122 p.

CAPÍTULO II. MODELO DE EFECTOS MIXTOS ALTURA-DIÁMETRO PARA *Abies religiosa* EN DISTINTAS ENTIDADES FEDERATIVAS DE MÉXICO

MODEL OF MIXED EFFECTS HEIGHT-DIAMETER FOR *Abies religiosa* IN DIFFERENT FEDERATIVE ENTITIES IN MEXICO

1. RESUMEN

En el manejo forestal y la silvicultura, la altura de los árboles es una variable indispensable para distintos estudios; sin embargo, su medición en campo es difícil y costoso e inclusive con alto grado de errores. El objetivo de la investigación fue ajustar un modelo local no lineal altura-diámetro con efecto mixto para estimar la altura de árboles de *Abies religiosa* en distintas entidades federativas de México. Se utilizó la ecuación de Richards (1959) para el ajuste de un total de 2,273 datos que se obtuvieron de distintas unidades de manejo; en donde fue necesario utilizar dos métodos de estimación. Para el modelo base se utilizó el Método de Mínimos Cuadrados (MMC) y para la obtención de los parámetros aleatorios (u_j = UMAFOR) de efectos mixtos se utilizó el método de primer orden (FIRO) a través del procedimiento de Modelo Mixto No Lineal (NLMIXED) con la finalidad de minimizar los errores. En forma general, la explicación de la variable independiente para cada unidad de manejo fue muy aceptable al presentar de forma consistente desde el punto de vista biológico, al estimar con precisión la altura. El modelo será útil para cada UMAFOR en los distintos trabajos de inventarios forestales al minimizar los errores, tiempo y costos.

Palabras clave: *Abies religiosa*, altura total, ecuaciones locales, efectos mixtos, relación altura-diámetro

ABSTRACT

In forest management and silviculture, tree height are an indispensable variable for different studies; however, its measurement in the field is difficult and expensive and inclusive with a high degree of errors. The goal of the research was to fit a local nonlinear height-diameter model with mixed effect to estimate the height of *Abies religiosa* trees in different states of Mexico. The Richards equation (1959) was verified for the fit of a total of 2, 273 data that were obtained from different management units; where it was necessary to use two different methods. For the base model, we used the Least Squares Method (MCO); to obtain the random parameters (u_j = UMAFOR) of mixed effects, the first order method (FIRO) was adjusted through the Non-Linear Mixed Model procedure (NLMIXED) in order to minimize errors. In general, the explanation of the independent variable for each management unit was highly acceptable by presenting the biologically consistent form, by accurately capturing the height. The model will be useful for each UMAFOR in the different forest inventory works by minimizing errors, time and costs.

Keywords: *Abies religiosa*, total height, local equations, mixed effects, height-diameter ratio.

2. INTRODUCCIÓN

El crecimiento y desarrollo de los bosques están relacionados con diversos factores que afecta de forma directa la productividad, lo cual se puede entender o analizar a través de la modelación forestal (Ahmadi & Alavi, 2016; Guzmán-Santiago, Aguirre-Calderón, & Vargas-Larreta, 2020). El conocimiento de esta relación es importante también en otros contextos, incluyendo la estimación de biomasa forestal, evaluar la calidad del sitio, la simulación de la dinámica de las masas forestales y el análisis de las bases teóricas del crecimiento de árboles (Xionweng & Brockway, 2017; Castillo-Gallegos, Jarillo-Rodríguez, & Escobar-Hernández, 2018). La medición de la variable altura total resulta costosa, difícil e inclusive genera un alto margen de error por diversas condiciones ambientales,

a diferencia del diámetro normal (1.30 m) (Sharma & Breidenbach, 2015; Corral-Rivas, Silva-Antuna, & Quiñonez-Barraza, 2019). Estas variables tienden a estar correlacionadas dado que se obtienen de árboles de un mismo sitio, lo que provoca una falta de independencia de los datos de las mediciones (Fox *et al.*, 2001).

Estas ecuaciones se pueden ajustar para los árboles de una misma especie o rodal (Arias, 2004), y pueden ser de tipo local, generalizada y efectos mixtos; la primera estima la altura a partir únicamente del diámetro normal, mientras que la segunda incluye el diámetro normal, y algunas variables del rodal para la estimación de la altura de los árboles (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009); el tercero se complementa con algunas variables de las anteriores, donde considera un parámetro fijo más un aleatorio. Las técnicas de efectos mixtos son apropiadas para resolver los problemas de correlación, ya que estiman simultáneamente los parámetros fijos y aleatorios en un modelo seleccionado por el propio investigador, lo cual facilita modelar la variabilidad detectada entre sitios de la misma muestra (Castedo-Dorado, Diéguez-Aranda, Barrio-Anta, Sánchez-Rodríguez, & Gadow, 2006), además de mejorar en los estadísticos de bondad de ajuste (García & Rapelli, 2011; Ercanli, 2015; Mehtätalo, De Miguel, & Gregoire, 2015).

Hace décadas México contaba con pocas ecuaciones de crecimiento, sobre todo de volumen para especies de clima templado que incluso se utilizaban equivocadamente en muchos casos (Cruz-Cobos, Cruz-Cobos, Mendía-Santana, Jiménez-Flores, Nájera-Luna, & Cruz-García, 2016) por lo que no siempre generan confianza en las estimaciones (De Azevêdo, Paes, Calegari, & Do Nascimento, 2014). Ante esta situación distintas instituciones han mostrado interés en desarrollar tecnologías apropiadas para el sector forestal, tales como los modelos biométricos para apoyar a los técnicos forestales en la obtención de mejores estimaciones de los rendimientos maderables de sus bosques (Vargas-Larreta *et al.*, 2017); así como para la toma de decisiones sobre el manejo (Diamantopoulou & Özçelik, 2012). Una relación altura-diámetro puede considerarse apropiada para su incorporación a los modelos de crecimiento, que

a su vez sea de utilidad en los trabajos preferentemente en los inventarios forestales (Guerra-De la Cruz *et al.*, 2019). El objetivo de la investigación fue ajustar un modelo local no lineal altura-diámetro con efecto mixto que permita estimar la altura de árboles de *Abies religiosa* en distintas entidades federativas de México, como una herramienta para los técnicos y productores forestales.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Área de estudio

Se recabó información de 17 Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR), mismas que corresponden a ocho entidades federativas, que son: Guerrero (1203), Hidalgo (1303), Jalisco (1404, 1410), Ciudad de México (1503, 1507, 1508, 1509), Michoacán (1605, 1607, 1608), Puebla (2105, 2108), Tlaxcala (2901, 2902) y Veracruz (3004, 3012) (INEGI, 2016).

3.2 Tamaño de muestra

Se tomó un total de 2, 273 árboles que provienen de zonas de aprovechamiento, para lo cual se utilizó el muestreo destructivo que consistió en derribar, seccionar y medir los árboles; en áreas no autorizadas para el derribo, las mediciones se hicieron en árboles en pie de manera escalonada y con forcípula láser para medir el diámetro a distintas alturas (considerando diferentes categorías diamétricas) (Cuadro 1). En cada árbol, el diámetro normal (Dn, cm) fue medido en pie con una cinta diamétrica y forcípula, medido a 1.30 metro sobre el nivel del suelo; y la altura total (At, m) con un hipsómetro. Los individuos derribados fueron medidos con el flexómetro.

Cuadro 1. Resumen de las variables dasométricas

Entidades federativas	UMAFOR	No de árboles	Media	Máximo	Mínimo	Desviación estándar
Diámetro normal (Dn, cm)						
Guerrero	1203	162	28.49	72.20	8.70	14.80
Hidalgo	1303	180	36.99	62.10	8.60	11.09
Jalisco	1404	52	36.74	70.00	8.50	16.17
	1410	52	41.20	80.00	10.00	17.24
	1503	133	45.53	94.00	9.00	23.37

Ciudad de México	1507	84	49.35	90.25	8.00	22.79
	1508	151	45.97	86.00	9.00	20.51
	1509	139	39.38	79.00	9.00	17.41
Michoacán	1605	108	38.41	75.00	9.00	13.82
	1607	148	43.61	92.30	8.00	19.73
	1608	133	43.06	88.30	8.00	19.16
Puebla	2105	175	43.72	99.00	5.40	23.11
	2108	156	43.27	86.10	10.00	19.75
Tlaxcala	2901	205	30.50	70.00	9.80	14.32
	2902	97	34.44	86.50	13.00	16.28
Veracruz	3004	150	31.14	63.30	8.20	10.54
	3012	148	33.36	86.00	12.20	12.36
Altura total (At, m)						
Guerrero	1203	162	21.50	44.80	7.70	7.95
Hidalgo	1303	180	31.83	43.30	8.00	6.79
Jalisco	1404	52	23.40	38.80	7.30	8.93
	1410	52	26.60	37.00	10.90	6.89
Ciudad de México	1503	133	28.57	48.20	6.20	10.94
	1507	84	30.73	50.00	8.10	10.14
	1508	151	28.03	41.67	10.80	9.01
	1509	139	23.75	42.00	6.60	8.94
Michoacán	1605	108	24.09	39.57	9.80	5.54
	1607	148	26.81	41.30	10.02	7.75
	1608	133	26.36	45.10	6.35	9.60
Puebla	2105	175	26.45	41.30	6.10	8.72
	2108	156	27.07	40.60	9.90	7.83
Tlaxcala	2901	205	17.34	38.20	5.30	8.59
	2902	97	21.14	37.40	6.20	8.09
Veracruz	3004	150	16.51	25.40	7.60	3.61
	3012	148	18.08	28.90	8.20	4.60

3.3 Ecuación ajustada

Se ajustó la ecuación local de Richards (1959) de tipo no lineal para calcular la relación entre la altura y el diámetro; ya que desde un punto biológico este tipo de ecuación tiene un comportamiento más consistente de la curva (Ec. 1) (Huang, Titus, & Wiens, 1992; Diamantopoulou & Özçelik, 2012). Dicha expresión con término fijo 1.3 fue modificada por la variable altura total mínima (At_{min} , m) de cada UMAFOR, la cual es la referencia donde nace la curva para así evitar que se pierda información de los datos; además esta modificación ayuda a mejorar las estimaciones de la variable predictora (Ec. 2).

$$AT = 1.3 + b_0 * (1 - \exp(-b_1 * D_n))^{b_2} + e \quad 1$$

$$AT = Atmin + b_0 * (1 - \exp(-b_1 * D_n))^{b_2} + e \quad 2$$

3.4 Modelo de efectos mixtos

Se utilizó la técnica de efectos mixtos con la finalidad de explicar la variabilidad de los datos en cada zona mediante la introducción de un parámetro aleatorio que estima de forma simultánea los parámetros fijos (Calama & Montero, 2004; Castedo-Dorado *et al.*, 2006).

En seguida se expresa el vector de los parámetros de un modelo mixto no lineal (Pinheiro & Bates, 1998):

$$Y_{ij} = f(\Phi_i, X_{ij}) + e_{ij} \quad 3$$

$$\Phi_i = A_i \lambda + B_i b_i \quad 4$$

donde: Y_{ij} = la j -ésima altura total tomada de i -ésima unidad de manejo, X_{ij} = la j -ésima medición de la variable predictora (D_n) tomada de i -ésima unidad de manejo, Φ_i = vector de parámetros $r \times 1$ (r es el número total de parámetros en el modelo) específico para la j -ésima unidad de manejo (se puede dividir en componentes fijos y aleatorios), f = función no lineal,

e_{ij} = error aleatorio en forma de vector, λ = vector $p \times 1$ de los parámetros fijos (p = número de parámetros fijos), b_i = vector $q \times 1$ de los parámetros aleatorios asociados con la i -ésima unidad (q = es el número de parámetros aleatorios) y A_i y B_i = matrices de tamaño $r \times p$ y $r \times q$ para los efectos fijos y aleatorios específicos para la i -ésima unidad, respectivamente.

Así mismo se logró agregar un efecto aleatorio (u_i) al estimador de parámetro b_0 , mismo que fue calculado para cada unidad de manejo (UMAFOR). Con estas modificaciones, se garantiza obtener una mayor estimación en árboles con características similares de cada zona de estudio (Ec. 2).

$$AT_{ij} = Atmin + (b_0 + u_i) * (1 - \exp(-b_1 * D_{nj}))^{b_2} + e_{ij}$$

5

3.5 Método de ajuste

Para la obtención de los estimadores de parámetros del modelo base, se utilizó el Método de Mínimos Cuadros Ordinarios (MMCO) con la finalidad de minimizar errores de los parámetros. Se utilizaron valores obtenidos por otros autores para evitar la convergencia de los parámetros a un óptimo local (Vargas-Larreta *et al.*, 2017). Mientras que los parámetros aleatorios (U_{ij}) se calcularon mediante el procedimiento Modelo Mixto No Lineal (NLMIXED), a través del método de Primer Orden (FIRO) para maximizar la verosimilitud (Beal & Sheiner, 1982) mediante el software SAS/ETS® (SAS Institute Inc. 2008).

3.6 Estadísticos de bondad de ajustes considerados

La calidad de la ecuación fue medida a través de escalas numéricas y gráficas, y con los residuos obtenidos en la fase de ajuste se calcularon los estadísticos siguientes: el coeficiente de determinación (R^2); en el cual es deseable que los valores se aproximen o alcancen el valor de 1 y la Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) que es conveniente que tome el valor de cero. Así mismo los Criterios de Información Akaike y Bayesiano (CIA Y CIB), de los que se toma aquel que presenta un menor valor (Del Carmen-García, Castellana, Rapelli, Koegel, & Catalano, 2014). Por otra parte, el sesgo (\bar{e}) busca que el promedio de los residuales sea igual a cero, con lo que se logra que el estimador sea centrado o insesgado (Amat-Rodrigo, 2016).

La expresión de los estadísticos de bondad de ajuste es la siguiente:

$$R^2 = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - \bar{y}_i)^2} \right]$$

6

$$\text{REMC} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}} \quad 7$$

$$\text{CIA} = n * \ln(\text{SCR}) + 2(p + 1) - n * \ln(n) \quad 8$$

$$\text{CIB} = n * \ln \left[\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p} \right] + p * \ln(n) \quad 9$$

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \bar{Y}_i)}{n} \quad 10$$

Donde: SCR= Suma de Cuadrado del Error, Y_i = valores observados, \hat{Y}_i = valores predichos, \bar{Y}_i = valores promedio, p = número de parámetros a estimar, n = número de observaciones, \ln = logaritmo natural.

4. RESULTADOS

4.1 Información estadística entre UMAFORES

En el cuadro 1 se muestra la estructura de la ecuación para cada una de las Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR), cada una acompañada de la variable Altura mínima (Altmín, m) que sustituyó al termino fijo 1.3 m. Después de varias combinaciones de los estimadores, la mejor convergencia resultó asociar la asíntota **b₀** con un aleatorio **u_i** y el estimador de forma **b₂** y **b₃**; esta modificación explica y hace más flexible la descripción de la curva del conjunto de datos de cada uno de las UMAFORES. Los resultados obtenidos en cuanto a los estadísticos de bondad de ajuste de la ecuación local ajustada Richards (1959) con efectos mixtos resultaron significativos ($P < 0.0001$) a un nivel de confianza del 95%, lo que da certeza a las estimaciones de la variable predictora para los sitios correspondientes (Quiñones-Barraza *et al.*, 2018).

Las medidas de ajuste (REMC, R^2 , sesgo entre otros) mostraron información adecuada para cada Unidad de Manejo (17 UMAFOR) como una respuesta inmediata de las condiciones de la calidad del sitio de los árboles (Cuadro 2). Así,

por ejemplo, dado que son bosques irregulares, cada UMAFOR presentó distinta Atmín, la 2901, 1503 y 2902 presentaron la menor Atmín, la primera corresponde a 5.30 m, y las otras dos fueron de 6.20 m; todas presentaron buenos estadísticos de bondad de ajuste. Así mismo se observa que la UMAFOR 1410 presentó una altura mínima de 10.90 m; seguida por la 1508 que mostró 10.80 metros, como una evidencia del respectivo análisis de la bondad de ajuste.

Cuadro 2. Valores de los estimadores de los parámetros

Entidades Federativas	UMAFOR	Expresión
Guerrero	1203	$AT = 7.70 + (30.7894 + 3.4367) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Hidalgo	1303	$AT = 8.00 + (30.7894 + 12.1845) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Jalisco	1404	$AT = 7.30 + (30.7894 + 1.0630) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	1410	$AT = 10.90 + (30.7894 + (-3.9507)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Estado de México	1503	$AT = 6.20 + (30.7894 + 7.2495) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	1507	$AT = 8.10 + (30.7894 + 4.3374) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	1508	$AT = 10.80 + (30.7894 + (-2.2600)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	1509	$AT = 6.60 + (30.7894 + 0.7380) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Michoacán	1605	$AT = 9.80 + (30.7894 + (-4.6962)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	1607	$AT = 10.20 + (30.7894 + (-3.1689)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	1608	$AT = 6.35 + (30.7894 + 4.0054) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Puebla	2105	$AT = 6.10 + (30.7894 + 3.9178) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	2108	$AT = 9.90 + (30.7894 + (-1.5440)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Tlaxcala	2901	$AT = 5.30 + (30.7894 + (-0.3088)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	2902	$AT = 6.20 + (30.7894 + 0.8122) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Veracruz	3004	$AT = 7.60 + (30.7894 + (-11.2077)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
	3012	$AT = 8.20 + (30.7894 + (-10.1130)) * (1 - \exp(-0.0381 * D_n))^{2.0838}$
Componente de varianza	σ_u^2	39.271
	σ_e^2	16.213

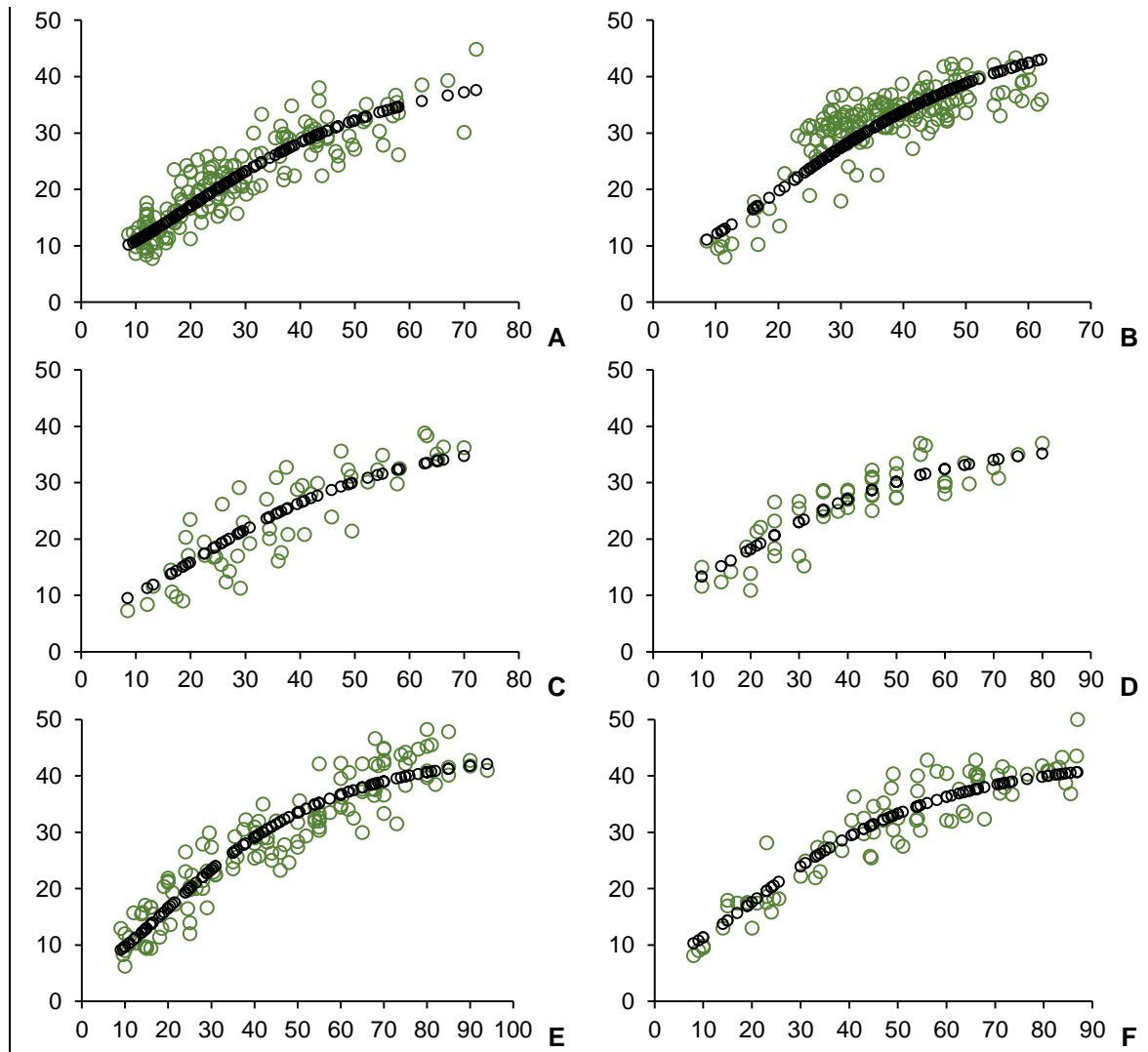
Cuadro 3. Estadísticos de bondad de ajuste del modelo

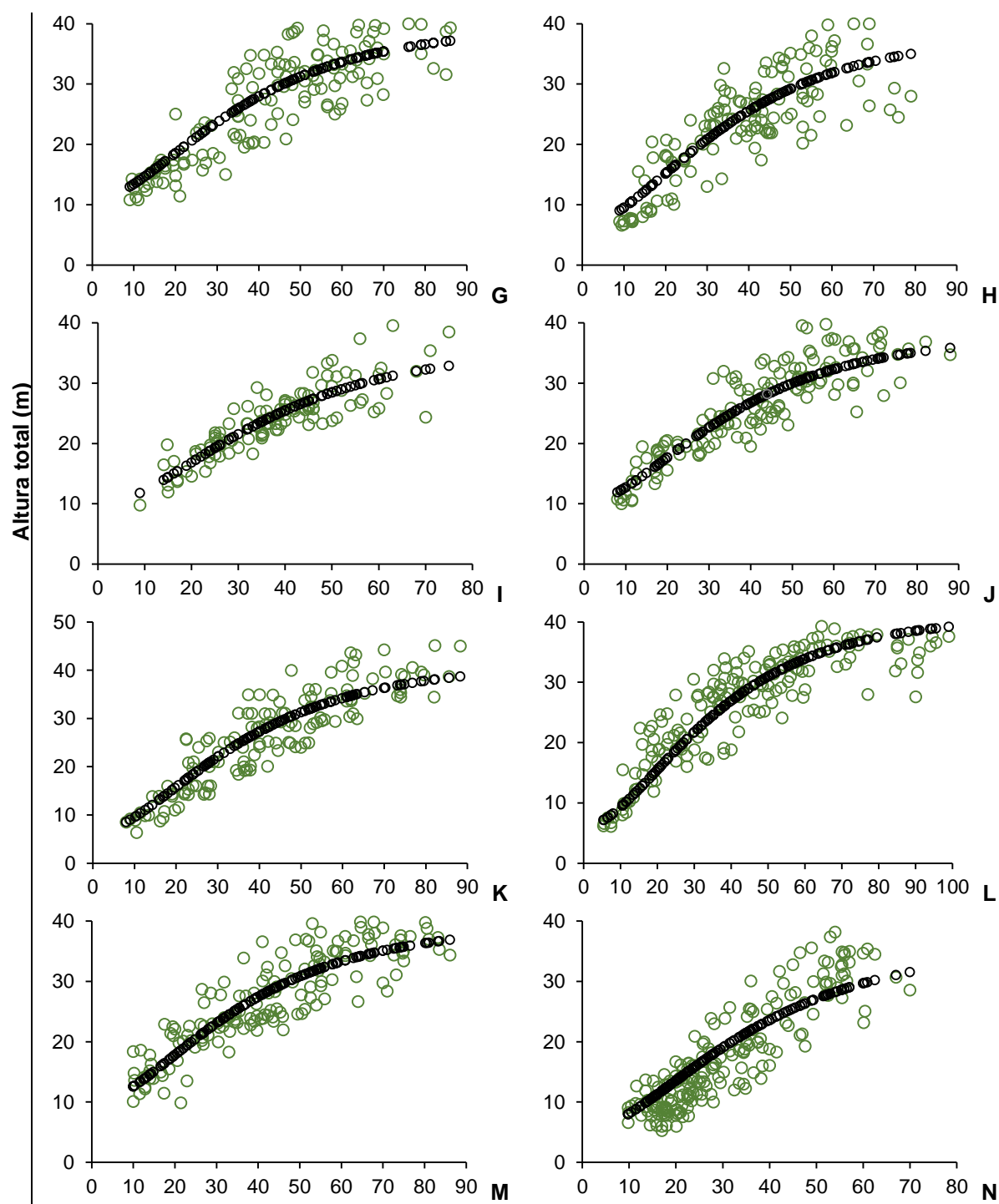
Entidades Federativas	UMAFOR	REMC	R²	CIA	CIB	Sesgo (\bar{e})
Guerrero	1203	3.7035	0.8098	445.7121	450.2912	0.2509
Hidalgo	1303	4.4489	0.6122	559.0265	563.5489	0.6535
Jalisco	1404	5.8641	0.7381	201.0635	208.9121	-0.3100
	1410	4.1736	0.7773	165.6963	173.5448	-0.1219
Estado de México	1503	4.2827	0.8735	408.0611	412.8075	-0.0657
	1507	4.7212	0.8350	280.5828	286.1789	0.2588
	1508	5.0121	0.7389	508.1666	512.7954	-0.2214
	1509	5.6097	0.6690	500.6449	505.3461	-0.0714
Michoacán	1605	3.0901	0.7468	264.3374	269.3716	-0.0185
	1607	4.3974	0.7297	459.7291	464.3740	0.3375
	1608	4.7443	0.7961	435.2906	440.0370	-0.3342
Puebla	2105	4.4990	0.7601	547.9777	552.5133	0.4534
	2108	3.9984	0.7739	453.8406	458.4452	0.1040
Tlaxcala	2901	5.0602	0.7255	686.6238	691.1020	-1.0132
	2902	4.3816	0.7675	306.9524	312.1929	-0.2185
Veracruz	3004	2.2255	0.6701	261.3738	266.0079	0.0350
	3012	3.4950	0.5308	391.7503	396.3952	-0.0551

4.2 Comparación altura-diámetro (h-d) entre UMAFOR

El análisis gráfico por clases diamétricas en función de la altura evidenció el comportamiento dentro de los intervalos de datos sobre la curva de cada una de las unidades de manejo, donde las UMAFORES 1203(A) y 1303(B) [Guerrero e Hidalgo], presenta una altura aproximada de 50 m, con categorías diamétricas (CD) entre 70 y 80 cm. Así mismo, las estimaciones en altura son biológicamente plausibles en todas las categorías de las UMAFORES de Jalisco 1404(C) y 1410(D), donde a pesar de que presentaron alturas similares, mostraron diferencias en los diámetros, ya que se encontraron categorías entre 80 y 90 cm. En lo que se refiere el grupo de UMAFORES, 1503(E), 1507(F), 1508(G) y 1509(H) [Estado de México] presentaron información dasométrica mayor a 90 cm y alturas superiores a 40 m, respectivamente. También se puede observar la excelente trayectoria que siguen las curvas de las UMAFORES de Michoacán 1605(I), 1607(J) y 1608(K) en donde se aprecia que poseen alturas (> 40) y diámetros (> 80) que guardan una relación positiva. De igual forma las UMAFORES de Puebla 2105(L) y 2108(M) tuvieron una distribución diamétrica

entre 90 y 100 cm, así mismo los sitios de estudio en Tlaxcala 2901(**N**) y 2902(**O**) presentaron valores superiores a 80 cm, con alturas que alcanzaron su valor máximo de 40 metros. Por otra parte, la información recopilada en los árboles de Veracruz 3004(**P**) y 3012(**Q**), para la primera UMAFOR se consiguieron categorías diamétricas de 70 cm y en la segunda se obtuvieron datos máximo de 90 cm, con alturas máximas de 30 metros; se observa que fueron los únicos sitios en que se encontraron datos con esa altura (Figura, 1).





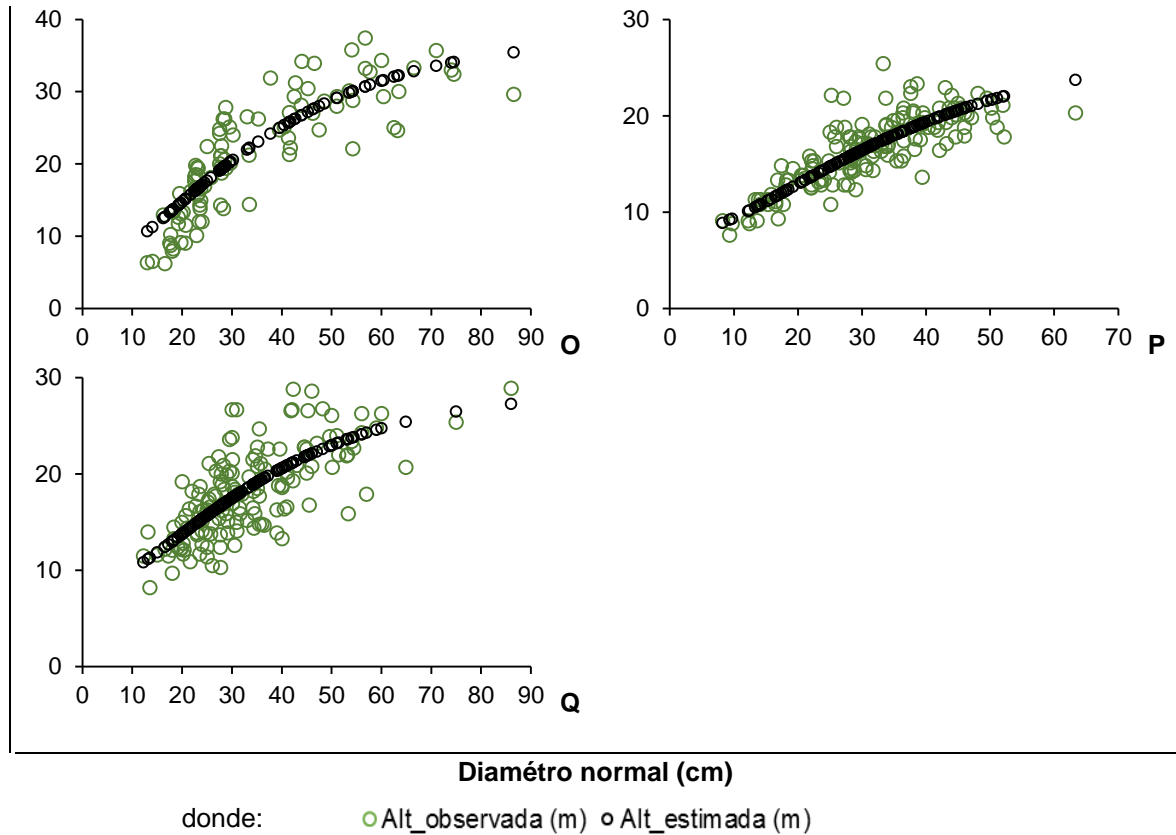


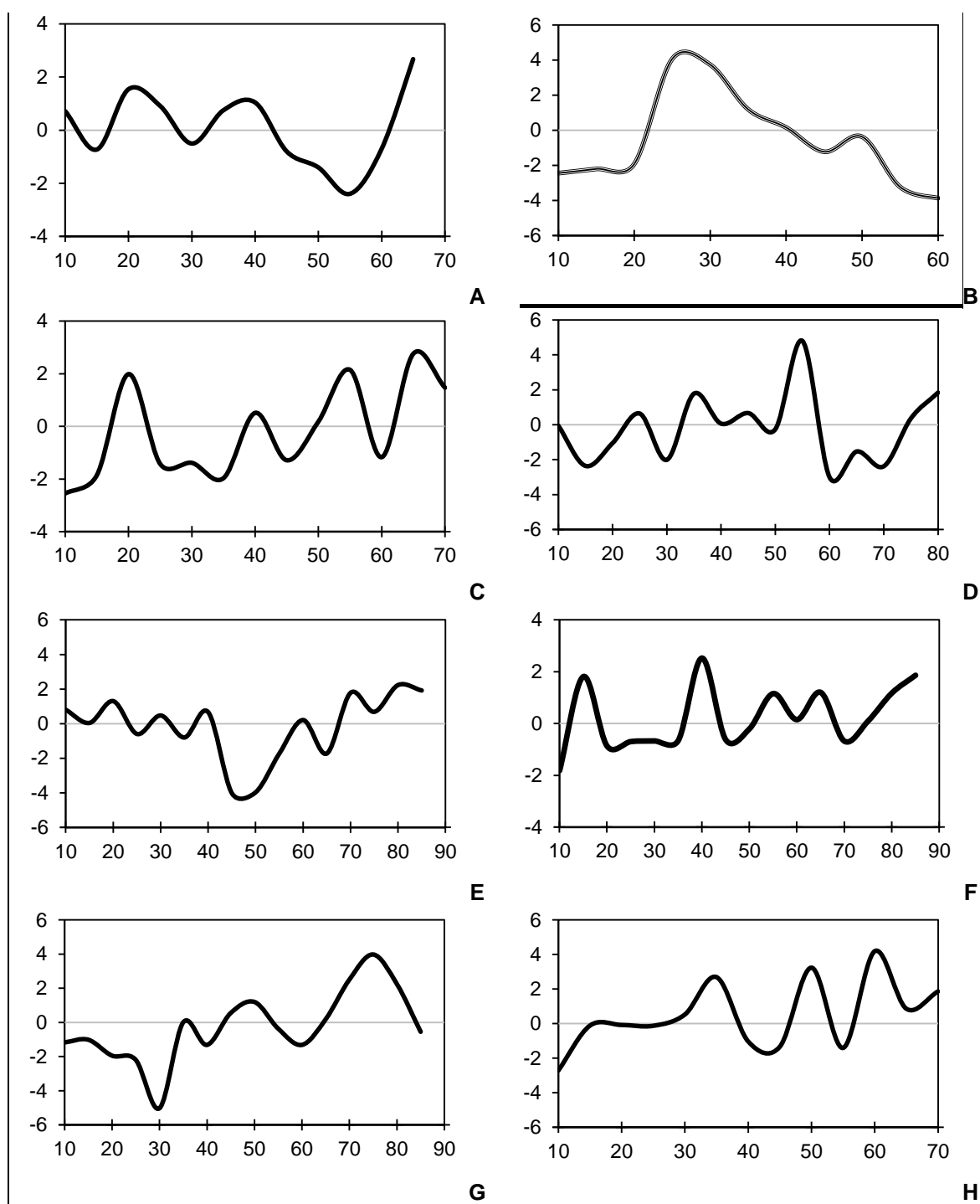
Figura 1. Altura-diámetro observado vs predicho: **A**=1203, **B**= 1303, **C**= 1404, **D**= 1410, **E**=1503, **F**=1507, **G**= 1508, **H**= 1509, **I**= 1605, **J**=1607, **K**=1608, **L**=2105, **M**=2108, **N**= 2901, **O**= 2902, **P**= 3004, **Q**=3012.

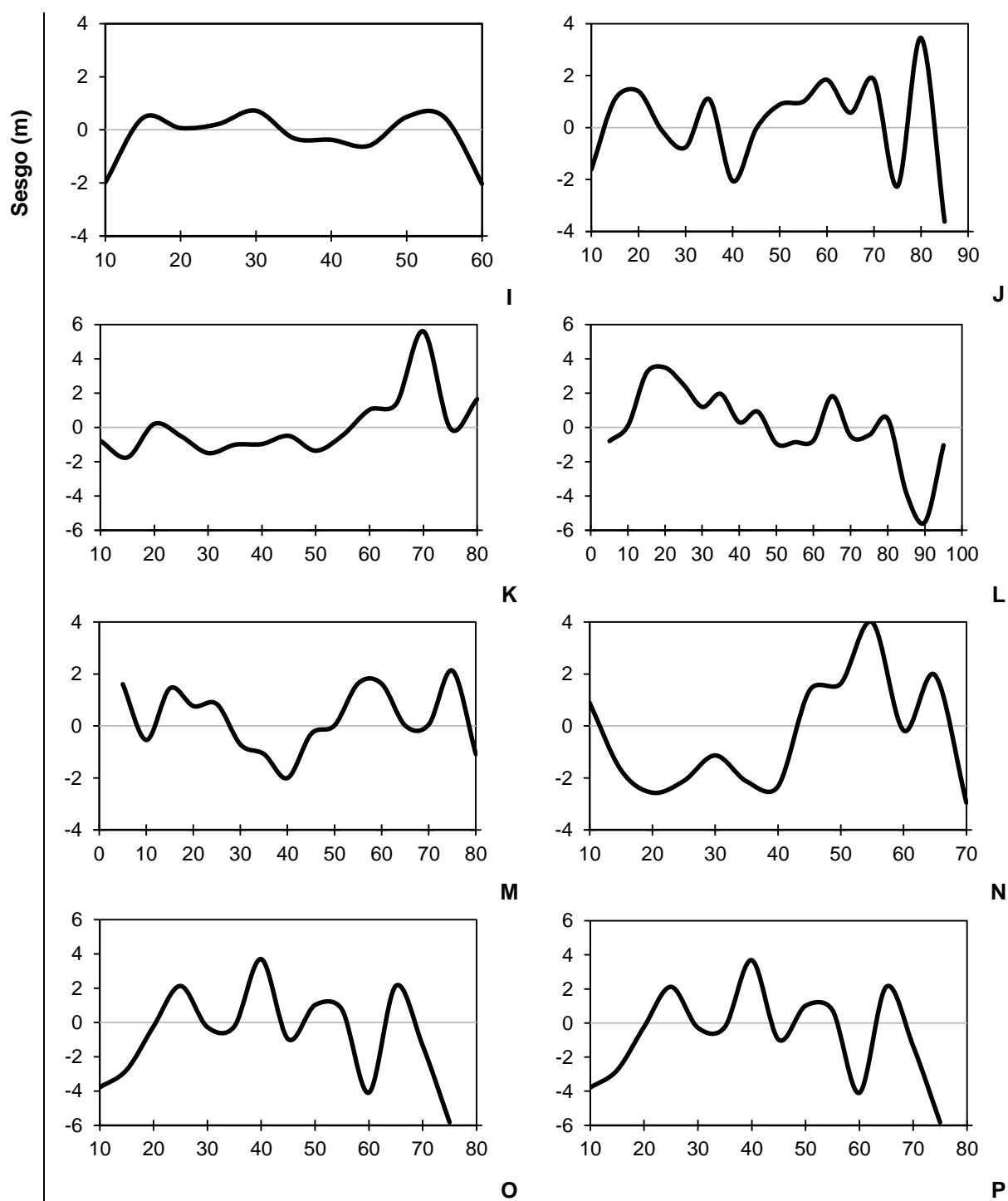
4.3 Evolución del sesgo de las UMAFORES

El análisis gráfico de cada una de las UMAFORES presentó de forma general un comportamiento deseable, por ejemplo; en Guerrero 1203(**A**) subestima con un error (2 m) en diámetros de 20 y 39; sin embargo, en el diámetro de 55 el modelo sobreestimó con un error de -2 m, y posteriormente en la clase diamétrica de 60 en adelante subestimó con 3.2 metros. Así mismo se observó que para los sitios de Hidalgo 1303(**B**) en categorías de 10, 20 (-2 m) y de 35 en adelante el modelo sobreestima con un error de 3.7 m; mientras que en árboles con diámetros de 21 a 34 cm tiende a subestimar, e inclusive el error más alto es de 4.2 metros (29 cm). Para Jalisco, UMAFORES 1404(**C**) y 1410(**D**), en ambas el modelo sobreestimó árboles que presentaron diámetros de entre 10 a 60 cm con errores de -2 m aproximadamente, excepto para diámetros de 20, 55, 65 (**C**) y 55 (**D**) que son subestimados hasta 2.5 metros de error.

Por otra parte, en las unidades de manejo de Ciudad de México 1503(**E**) y 1507(**F**) en lo general el modelo describe bien al conjunto de datos, ya que los errores de sobreestimación más notable (-4 m) ocurren en árboles con diámetros de entre 44 a 54 cm (**E**); mientras que en la unidad 1507 tiende a alcanzar un valor de 2.1 metros (15 y 40 cm). Las UMAFORES 1508(**G**) y 1509(**H**) tienen una distribución regular; en donde algunos datos alcanzaron el valor de 4 m aproximadamente. En lo que corresponde a Michoacán, la 1605(**I**), 1607(**J**) y 1608(**K**), en especial a las de **I** y **K** donde el modelo tuvo las mejores aproximaciones a cero; lo que es deseable, excepto para diámetro 68 cm donde alcanzó el máximo error de 5.8 metros (1608); mientras que para la 1607 la distribución de los datos es más inconsistente.

En la gráfica de Puebla, se aprecia que en la UMAFOR 2105(**L**) el modelo subestima la información dasométrica de 10 a 45 cm, y posteriormente logran alcanzar errores de -5.8 m; mientras que en la 2108(**M**) tiene una distribución más equitativa (+,- m). Por otra parte, se observa que en los sitios de estudio de Tlaxcala, la 2901(**N**) los árboles con clase diamétrica de 10 a 44 son sobreestimados por el modelo, algo que no sucede con los diámetros que le siguen. Para el caso de la 2902(**O**), sucede que en las primeras categorías son subestimadas y a partir de 55 cm ocurre con más frecuencia la sobreestimación. En lo que respecta a Veracruz, en la UMAFOR 3004(**P**) se aprecian las categorías de 10, 15 y de 60 cm en adelante, donde el error más notable es de 5.8 m (77 cm); mientras que en la 3012(**Q**) al igual que en las unidades de manejo **I** y **K**, tuvo un comportamiento deseable al aproximarse a cero en la mayoría de las categorías, salvo en los diámetros de 55 y 56 cm, que obtuvo un error de - 2 metros (Figura 2).





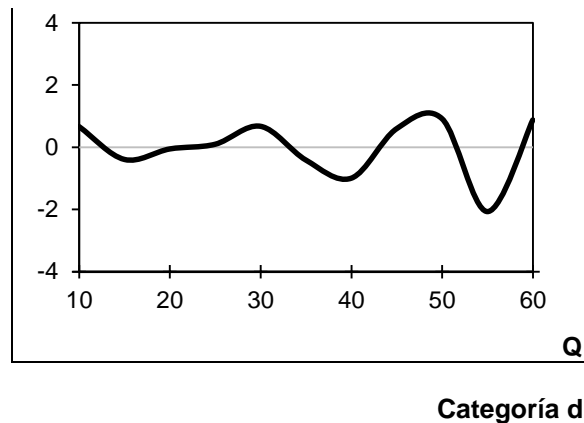


Figura 2. Sesgos de categorías diamétricas: **A**= 1203, **B**= 1303, **C**= 1404, **D**= 1410, **E**= 1503, **F**= 1507, **G**= 1508, **H**= 1509, **I**= 1605, **J**= 1607, **K**= 1608, **L**= 2105, **M**= 2108, **N**= 2901, **O**= 2902, **P**= 3004, **Q**= 3012.

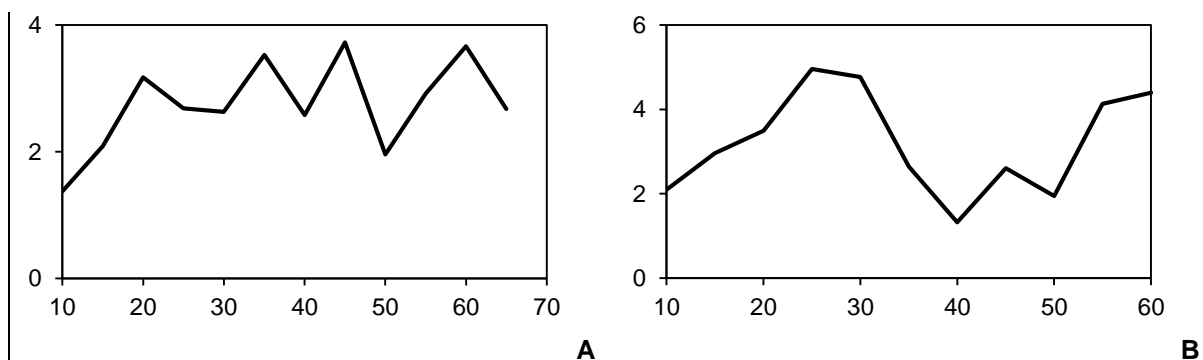
4.4 Evolución de la Raíz del error medio cuadrático (REMC)

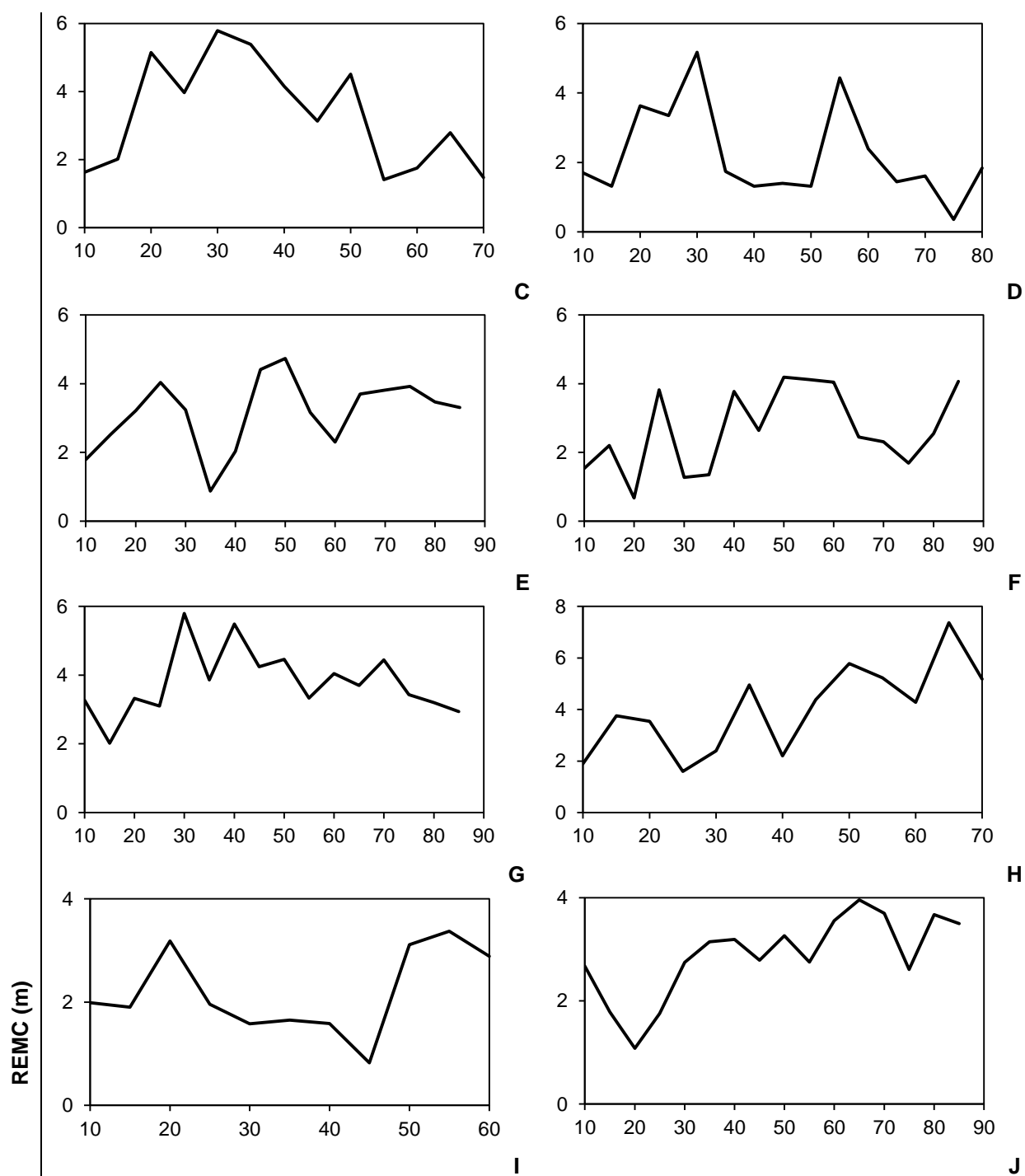
La información que brinda cada una de las ecuaciones con respecto a las UMAFORES, evidencia el comportamiento sobre los conjuntos de datos estimados; los cuales son convincentes, y se puede observar que en Guerrero 1203(**A**) el modelo describe la buena evolución de las categorías diamétricas, ya que el error oscila entre 1.8 y 3.7 metros; mientras que para la unidad de manejo Hidalgo 1303(**B**) los errores más alto se encuentran en diámetros de 22 a 30 cm, y la mínima entre 40 cm en adelante (1.8 a 4.8 m). Por otra parte, la tendencia para las UMAFORES 1404(**C**) y 1410(**D**) [Jalisco] se aprecia que en ambas presentaron irregularidades en categorías de 10 a 30 cm (2 a 5 m) y, para datos posteriores el grado de error fue disminuyendo.

En el gráfico para los sitios de Ciudad de México 1503(**E**) y 1507(**F**) se observa que son similares en la raíz del error, ya que oscilan de 0.7 a 4.3 metros; sin embargo, las irregularidades más visibles se manifestaron en las categorías de 10 a 65 cm, en especial para la UMAFOR 1503. Estos dos últimos sitios 1508(**G**) y 1509(**H**) alcanzaron errores ligeramente más alto de 5.9 a 7.8 m, que probablemente se deban a la competencia del ambiente en que se encuentran. En lo que se refiere a la UMAFOR **G** sigue una tendencia de forma homogénea; mientras que la descripción del último caso sigue una distribución en una forma ascendente (**H**). Por otra parte, en las unidades de manejo 1605(**I**), 1607(**J**) y

1608(**K**) [Michoacán], se aprecia que en los tres sitios siguieron una distribución deseable sobre los datos, ya que los errores más altos fueron de 3.7-**I**, 3.9-**J** y 4.1 m-**K** respectivamente, resaltando que en caso de la **K** las categorías diamétricas se mantuvieron de forma consistente.

En Puebla, las UMAFORES 2105(**L**) y 2108(**M**) fueron las únicas en que se encontraron árboles con diámetros de 5 cm en adelante; logrando buenas estimaciones en la mayoría de los diámetros (<4.3). Por otra parte, la información dasométrica obtenida en Tlaxcala, la 2901(**N**) se aprecia que el modelo explica la alta relación de la altura de los árboles con sus respectivas clases diamétricas; también en la unidad de manejo 2902(**O**) se obtuvieron estimaciones que explican el buen grado de asociación que existe entre las variables, logrando que el modelo tome la forma de una onda triangular para algunos pares de diámetros. En Veracruz, la UMAFOR 3004(**P**) fue la única donde se encontraron diámetros máximos de 50 cm, y también la mejor en ser estimada por el modelo. También en la 3012(**Q**) se aprecia la buena relación de estimación que existe en los diámetros, ya que en general los errores oscilan entre 1 y 2.6 m; salvo para el diámetro de 15 cm que tiene un error de 4.2 metros. Casos similares ocurrieron en los sitios **I** y **B** donde también presentaron categorías menores a 60 cm (Figura 3).





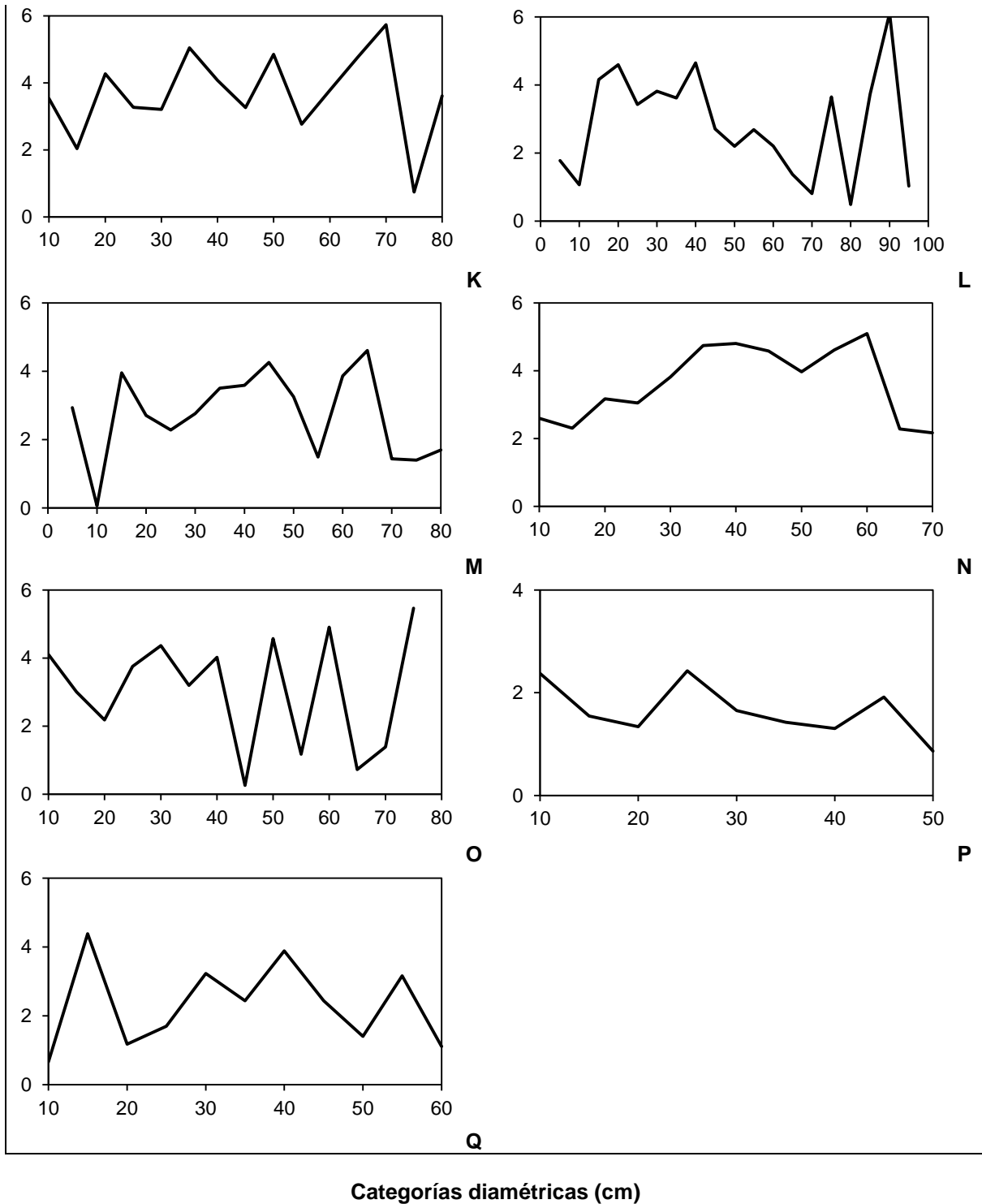


Figura 3. Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) de categorías diamétricas: **A**= 1203, **B**= 1303, **C**= 1404, **D**= 1410, **E**= 1503, **F**= 1507, **G**= 1508, **H**= 1509, **I**= 1605, **J**=1607, **K**= 1608, **L**= 2105, **M**= 2108, **N**= 2901, **O**= 2902, **P**= 3004, **Q**= 3012.

5. DISCUSIÓN

La relación alométrica altura diámetro (h-d) es adecuada para describir la curva del conjunto de datos, lo cual se respalda por algunos estudios (Fang & Bailey, 1998; Pinheiro & Bates, 2000; López-Sánchez *et al.*, 2003; Robinson & Wykoff, 2004; Sharma, & Parton, 2007; Salas, Stage, Robinson, 2008; Vargas-Larreta, Castedo-Dorado, Álvarez-González, Barrio-Anta, & Cruz-Cobos, 2009; Crecente-Campo, Corral-Rivas, Vargas-Larreta, & Wehenkel, 2014; Arnoni-Costa, Schroder, & Guimarães-Finger, 2016; Hernández-Ramos *et al.*, 2019b; Guzmán-Santiago *et al.*, 2019; entre otros); lo que implicó la selección del modelo de Richards al ser más flexible y versátil para modelar la relación h-d de las 17 UMAFORES correspondiente a las ocho entidades federativas en estudio.

Dado que las masas son heterogéneas e irregulares, es necesario que cada especie tenga su propia ecuación para minimizar las inconsistencias en la descripción numérica y gráfica (Vargas-Larreta *et al.*, 2009; Feldpausch *et al.*, 2011; Ahmadi & Alavi, 2016), ya que, se ha demostrado que árboles de la misma edad y especie que crecen en condiciones ambientales similares la relación no lineal entre el diámetro y altura se ve afectada por la densidad y la calidad del sitio (Prodan, Peters, Cox, & Real, 1997); además de presentar una variación en su rango de distribución (Chen & Brockway, 2017). Cabe mencionar que no se midieron árboles con diámetros cercanos a cero, el modelo está condicionado en estimar la altura cuando el diámetro es de 1.30 m (desde el nivel del suelo); que desde el punto de vista teórico es válido, aunque en raras ocasiones el investigador se interese en la proyección de altura en árboles con diámetro pequeño dado que no es de interés comercial (Fang & Bailey, 1998; Trincado & Leal, 2006; Puji, 2014; Guerra-De la Cruz *et al.*, 2019).

López-Villegas *et al.* (2017) encontraron que en ecuaciones locales obtuvieron excelentes ajustes en varias especies al considerar de manera implícita la calidad del sitio, en comparación con las ecuaciones globales al generar mayor variabilidad. Esto confirma con lo realizado por Guzmán-Santiago *et al.* (2019), al seleccionar el modelo h-d de Bates & Watts (1980) tipo local para modelar *Abies religiosa* para todas las UMAFORES. Sin embargo, se consideró prudente

realizar una segunda versión, con nueva metodología (efectos mixtos), en donde se generó una ecuación por UMAFOR (efecto aleatorio) con la finalidad de mejorar la evolución de la Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) y sesgo por categoría diamétrica, así reducir una sub y sobreestimación respecto a las categorías diamétricas. Se pudo demostrar que los datos cumplen con los atributos, que son deseables al alcanzar una asíntota en diámetros mayores y presentar siempre una pendiente positiva (Zhao, Mason, & Brown, 2006).

Gracias a las ecuaciones aditivas que resultaron al agregar el efecto fijo b_0 y un efecto aleatorio u_i fue posible obtener un ajuste simultáneo para obtener predicciones consistentes dada la alta flexibilidad con lo que se logra una mayor precisión al absorber la mayor variabilidad de relación alométrica (Crecente-Campo *et al.*, 2014; Tang *et al.*, 2016). Esta técnica facilita su uso en los inventarios forestales ya que Calama & Montero (2004), Castedo-Dorado *et al.* (2006), Crecente-Campo, Tomé, Soares, & Diéguez-Aranda (2010), Corral-Rivas, Álvarez-González, Crecente-Campo, & Corral-Rivas (2014) consideran conveniente en medir de tres a cuatro árboles en forma aleatoria para trabajos de este tipo.

En este contexto, el efecto mixto ha sido ampliamente utilizado para distintas especies de climas templados y tropicales. Duan, Gao, Wang, & Fu (2018) obtuvieron excelentes resultados para distintos rodales de abeto, alerce coreano, roble mongol y abedul blanco en China; con esta misma dinámica Crecente-Campo *et al.* (2010) realizaron sus estudios sobre *Eucalyptus globulus* en España. Se logra apreciar que el rango de la bondad de ajustes obtenida en *Abies*, es similar con lo reportado por Barrett (2006) al estimar la altura de 137, 374 árboles de 38 especies en distintas parcelas de los estados de Washington, Oregón y California en Estados Unidos; donde encontró un rango de coeficientes de determinación que van de 0.44 a 0.83%; lo cual se puede complementar con la información del bosque de *Pinus ponderosa* provenientes de cinco áreas de Estados Unidos (Uzoh, 2017).

Este resultado se complementa con lo reportado por Mehtätalo *et al.* (2015) al concluir que este tipo de modelo describe adecuadamente la curva de los trópicos

al capturar el efecto de la productividad de distintas parcelas. Al igual se puede analizar la información proveniente de bosques orientales al explicar más del 75.1% (Ahmadi, Alavi, Kouchaksaraei, & Aertsen, 2013); así como de frondosas y coníferas de la República Checa (Sharma, Vacek, & Vacek, 2016). Con este mismo procedimiento, Sharma y Breidenbach (2015) desarrollaron ecuaciones para modelar *Picea abies*, *Pinus sylvestris* y *Betula pubescens* en Noruega, donde el efecto aleatorio fueron las parcelas en estudio; lo cual es semejante a la investigación sobre *Drimys winter* en Chile (Salas-Eljatib, Corvalán, Pino, Donoso, & Soto, 2019).

También se sustenta en el trabajo Hernández-Ramos *et al.* (2019b) & Hernández-Ramos *et al.* (2019a) al generar un modelo h-d alométrico para *Bucida buceras* en Quintana Roo, México; así como para *Pinus teocote* por el método por máximo verosimilitud con enfoque mixto. Este modelo en su forma local con la inclusión de efectos mixtos fue usado sin problemas de convergencia al mejorar significativamente por Corral-Rivas *et al.* (2014) para especies del género *Pinus* y *Quercus*, en Durango, México. Este tipo de estimaciones, en algunos casos suelen obtenerse valores bajos, sobre todo de coeficiente de determinación (R^2), misma que se puede constatar en los trabajos de Castillo-Gallegos *et al.* (2018) donde el modelo de Richards explicó el 35% a la variable dependiente para *Pinus chiapensis* en México; lo cual respalda el haber obtenido en la UMAFOR 3012 [Veracruz] un $R^2=53\%$, siendo esta la de menor valor. Con este mismo modelo, Corral-Rivas *et al.* (2019) encontraron que los mejores estadísticos y bondad de ajustes para coníferas en México.

6. CONCLUSIÓN

El análisis gráfico y bondad de ajuste facilitó la interpretación de la relación altura-diámetro de Richards sobre el crecimiento de los árboles en las distintas entidades en diferentes condiciones de sitios. A partir del modelo base, se utilizó una metodología de efectos mixtos; se le incluyó un parámetro aleatorio u_i al estimador de parámetro b_0 que toma en cuenta la variabilidad existente entre las UMAFORES con la finalidad de mejorar en la descripción de las curvas, y sobre

todo facilita la estimación en altura al tomar datos de por lo menos tres árboles promedio, considerando las categorías diamétricas. Además, este tipo de metodología reduce ligeramente la sub y sobreestimación de un modelo base y es posible incluirlo en un modelo crecimiento para estimaciones de volumen de tipo forestal. Cabe mencionar que para *Abies religiosa* es la primera ecuación que se genera a nivel de entidad federativa con este tipo de enfoque y su uso se centra en trabajos de inventarios.

7. REFERENCIAS

- Ahmadi K., Alavi, S. J., Kouchaksaraei, M. T., & Aertsen, W. (2013): Non-linear height-diameter models for oriental beech (*Fagus orientalis* Lipsky) in the Hyrcanian forests, Iran. *Biotechnology, Agronomy, Society and Environment*, 17, 431–440.
- Ahmadi, K., & Alavi, S. J. (2016). Generalized height-diameter models for *Fagus orientalis* Lipsky in Hyrcanian forest, Iran. *Journal of forest science*, 62(9), 413-421. DOI: 10.17221/51/2016-JFS.
- Amat-Rodrigo, J. (2016). Selección de predictores y mejor modelo lineal múltiple. RPubS. Madrid, España. 83 p.
- Arias, D. (2004). Estudio de las relaciones altura-diámetro para seis especies maderables utilizadas en programas de reforestación en la Zona Sur de Costa Rica. *Revista Forestal Kurú*, 1(2): 2-11.
- Arnoni-Costa, E., Schroder, T., & Guimarães-Finger, C. A. (2016). Height-diameter relationships for *Araucaria angustifolia* (bertol.) kuntze in southern Brazil. *CERNE*, 22(4), 493-500.
- Barrett, T. M. (2006). Optimizing efficiency of height modeling for extensive forest inventories. *Canadian Journal of Forest Research*, 36(9), 2259–2269. DOI: 10.1139/x06-128.
- Bates, D. M., & Watts, D. G. (1980). Relative curvature measures of nonlinearity. *Journal of the Royal Statistical Society Series*, 42(1):1-25.7.

- Beal, S. L., & Sheiner, L. B. (1982). Estimating population kinetics. *CRC Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 8, 195-222.
- Calama, R., & G. Montero, G. (2004). Interregional nonlinear height–diameter model with random coefficients for stone pine in Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 34, 150-163. DOI: 10.1139/X03-199.
- Castedo-Dorado, F., Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Sánchez-Rodríguez, M., & Gadow, K. (2006). A generalized height–diameter model including random components for *radiata Pine* plantations in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*, 229, 202-213. DOI:10.1016/j.foreco.2006.04.028.
- Castillo-Gallegos, E., Jarillo-Rodríguez, J., & Escobar-Hernández, R. (2018) Diameter-height relationships in three species grown together in a commercial forest plantation in eastern tropical México. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 24(1), 33-48. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2017.05.033.
- Chen, X., & Brockway, D. G. (2017). Height-diameter relationships in longleaf pine and four swamp tree species. *Journal of Plant Studies*, 6(2), 94-101. DOI:10.5539/jps.v6n2p94.
- Corral -Rivas, S., Álvarez-González, J. G., Crecente-Campo, F., & Corral-Rivas, J. J. (2014). Local and generalized height-diameter models with random parameters for mixed, unevenaged forests in Northwestern Durango, Mexico. *Forest Ecosystems*, 1(6), 1–9. DOI:10.1186/2197-5620-1-6.
- Corral-Rivas, S., Silva-Antuna, A. M., & Quiñonez-Barraza, G. (2019). Modelo generalizado no-lineal altura-diámetro con efectos mixtos para siete especies de *Pinus* en Durango, México.
- Crecente-Campo, F., Corral-Rivas, J., Vargas-Larreta, B., & Wehenkel, C. (2014). Can random components explain differences in the height–diameter relationship in mixed uneven-aged stands? *Annals of Forest Science*, 71(1), 51–70. DOI: 10.1007/s13595-013-0332-6.
- Crecente-Campo, F., Tomé, M., Soares, P., & Diéguez-Aranda, U. (2010). A generalized nonlinear mixed-effects height–diameter model for *Eucalyptus*

- globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*, 259, 943-952. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2009.11.036>.
- Cruz-Cobos, F., Mendía-Santana, R., Jiménez-Flores, A. A., Nájera-Luna, J. A., & Cruz-García, F. (2016). Ecuaciones de volumen para *Arbutus* spp. (madroño) en la región de Pueblo Nuevo, Durango. *Investigación y Ciencia*, 24(68), 41-47. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67448742006>.
- De Azevêdo, T. K., Paes, J. B., Calegari, L., & Do Nascimento, J. W. (2014). Relações entre volume e massa da madeira e casca de jurema-preta (*Mimosa tenuif lora*). *Revista Brasileira de Ciências Agrárias*, 9(1), 97-102. Retrieved from <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=119030125017>.
- Del Carmen-García, M., Castellana, N., Rapelli, C., Koegel, L., & Catalano, M. (2014). Criterios de información y predictivos para la selección de un modelo lineal mixto. *SaberEs*, 6, 61-76. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5515546>.
- Diamantopoulou, M. J., & Özçelik, R. (2012). Evaluation of different Modeling approaches for total tree-height estimation in Mediterranean Region of Turkey. *Forest Systems*. 21(3): 383-397.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., Sánchez-Rodríguez, F. (2009). *Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural. Galicia, España. 273 p.
- Duan, G., Gao, Z., Wang, Q., & Fu, L. (2018). Comparison of different height-diameter modelling techniques for prediction of site productivity in natural uneven-aged pure stands. *Forests*, 9(63), 2-18. DOI:10.3390/f9020063.
- Ercanli, Í. (2015). Nonlinear mixed effect models for predicting relationships between total height and diameter of Oriental beech trees in Kestel, Turkey. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(2), 187-202. DOI:10.5154/r.rchscfa.2015.02.006.

- Fang, Z., & Bailey, R. L. (1998). Height-diameter models for tropical forests on Hainan Island in southern China. *Forest Ecology and Management*, 110, 315-327.
- Feldpausch, T. R., Banin, L., Phillips, O. L., Baker, T. R., Lewis, S. L., Quesada, C. A., ... Lloyd, J. (2011). Height-diameter allometry of tropical forest trees. *Biogeosciences* 8: 1081–1106. DOI:10.5194/bg-8-1081-2011.
- Fox, J., Ades, P., & Bi, H. (2001). Stochastic structure and individual-tree growth models. *Forest Ecology and Management*, 154, 261–276. DOI:10.1016/S0378-1127(00)00632-0.
- García, M. C., & Rapelli, C. (2011). Selección de un modelo no lineal mixto de niveles múltiples para modelar el crecimiento de la soja. *Revista FABICIB*, 15, 11-22. DOI: <https://doi.org/10.14409/fabicib.v15i1.877>.
- Guerra-De la Cruz, V., Islas-Gutiérrez, F., Flores-Ayala, E., Acosta-Mireles, M., Buendía-Rodríguez, E., Carrillo-Anzures, F., Pineda-Ojeda, T. (2019). Modelos locales altura-diámetro para *Pinus montezumae* Lamb. y *Pinus teocote* Schiede ex Schltdl. en Nanacamilpa, Tlaxcala. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 10(51). DOI:10.29298/rmcf.v10i51.407.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., & Vargas-Larreta, B. (2020). Forest volume estimation techniques with special emphasis on the tropics. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 26(2), 0-0. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2019.07.061.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., González- Tagle, M. A., Treviño-Garza, E. J., Jiménez-Pérez, J., Vargas-Larreta, B., Santos-Posada, H. M. (2019). Relación altura-diámetro para *Abies religiosa* Kunth Schltdl. & Cham. en el centro y sur de México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 10(52), 100–120. DOI: 10.29298/rmcf.v10i52.483.
- Hernández-Ramos, J., Hernández-Ramos, A., García-Cuevas, X., García-Magaña, J., Martínez-Salvador, M., Samperio-Jiménez, M., Hernández-Vargas, J. (2019b). Ecuaciones alométricas de altura-diámetro para bosques naturales de *Pinus teocote* Schlecht. & Cham. en Hidalgo, México.

Acta Universitaria Multidisciplinary Scientific Journal, 29, e1908.
DOI:10.15174.au.2019.1908.

Hernández-Ramos, J., Tamarit-Uriás, J. C., García-Cuevas, X., Hernández-Ramos, A., Reynoso-Santos, R., & Reyes-Hernández, V. (2019a). Modelos alométricos altura-diámetro para *Bucida buceras* (pukté) en Quintana Roo, México. *BOSQUE*, 40(3), 267-276, 2019 DOI: 10.4067/S0717-92002019000300267.

Huang, S., Titus, S., & Wiens, D. (1992). Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 22, 1297-1304.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2016). Compendio de información geográfica. Recuperado de: 09-05-2020 en www.internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/Productos/...2016/702825087357.pdf.

López-Sánchez, C. A., Gorgoso-Varela, J., Castedo-Dorado, F., Rojo-Alboreca, A., Rodríguez-Soalleiro, R., Álvarez-González, J., Sánchez-Rodríguez, F. (2003). A height-diameter model for *Pinus radiata* D. Don in Galicia (Northwest Spain). *Annals of forest science*, 60(3): 237-245. DOI: 10.1051/forest: 2003015.

López-Villegas, M. F., Santiago-García, W., Quiñonez-Barraza, Q., Suárez-Mota, M. E., Santiago-Juárez, W., & Santiago-García, E. (2017). Ecuaciones globales y locales de altura-diámetro de 12 especies de interés comercial en bosques manejados. *Revista Mexicana de Agroecosistemas*, 4(2), 113-126.

Mehtätalo, L., De-Miguel, S., & Gregoire, T. G. (2015). Modeling heightdiameter curves for prediction. *Canadian Journal of Forest Research*, 45, 826-837. DOI: 10.1139/cjfr-2015-0054.

Pinheiro, J. C., & Bates, D. M. (1998). Model building for nonlinear mixed effects model. Department of Biostatistics and Department of Statistics, University of Wisconsin. Madison, WI, USA. 11 p.

- Pinheiro, J. C., & Bates, D. M. (2000). Mixed-Effects Models in S and Splus. New York, USA. Springer-Verlag. 528 p.
- Prodan, M., Peters, R., Cox, F., & Real, P. (1997). *Mensura forestal*. San José, Costa Rica: Proyecto IICA/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible GmbH.
- Puji, N. N. (2014). Relationship between total tree height and diameter at breast height for tropical peat swamp forest tree species in Rokan Hilir district, Riau province. *Indonesian Journal of Forestry Research*, 1, 89-107.
- Quiñonez-Barraza, G., Zhao, D., Santos-Posadas, H. M., Santiago-García, W., Tamarit-Urías, J. C., & Nájera-Luna, J. A. (2018). Compatible taper, volume, green weight, biomass and carbon concentration system for *Quercus sideroxyla* Bonpl. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 25(1): 49-69. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2018.06.050.
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10, 290-300.
- Robinson, A. P., & Wykoff, W. R. (2004). Imputing missing height measures using a mixed-effects modeling strategy. *Canadian Journal of Forest Research*, 34(12), 2492-2500. DOI: 10.1139/x04-137.
- Salas, C., Stage, A. R., & Robinson, A. P. (2008). Modeling effects of overstory density and competing vegetation on tree height growth. *Forest Science*, 54(1), 107-122. DOI:10.1093/forestscience/54.1.107.
- Salas-Eljatib, C., Corvalán, P., Pino, N., Donoso, P. J., & Soto, D. P. (2019). Modelos de efectos mixtos de altura-diámetro para *Drimys winteri* en el sur (41-43° S) de Chile. *BOSQUE*, 40(1), 71-80, 2019. DOI: 10.4067/S0717-92002019000100071.
- SAS Institute Inc. (2008). SAS/STAT® 9.2 User's Guide Second Edition. Raleigh, NC, EE. UU., SAS Institute Inc. s/p. Recuperado de: <https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63033/HTML/default/viewer.htm>.

- Sharma, M., & Parton, J. (2007). Height-diameter equations for boreal tree species in Ontario using a mixed-effects modeling approach. *Forest Ecology and Management*, 249, 187-198. DOI:10.1016/j.foreco.2007.05.006.
- Sharma, R. P., & Breidenbach, J. (2015). Modeling height-diameter relationships for Norway spruce, Scots pine, and downy birch using Norwegian National Forest Inventory data. *Forest Science and Technology*, 11(1), 44-53. DOI:10.1080/21580103.2014.957354.
- Sharma, R. P., Vacek, Z., & Vacek, S. (2016). Nonlinear mixed effect height-diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic. *Journal of Forest Science*, 62(10), 470-484. DOI:10.17221/41/2016-JFS.
- Tang, X., Pérez-Cruzado, C., Torsten, V., Fehrmann, L., Álvarez-González, J. G., & Kleinn, C. (2016). Development of a compatible taper function and stand-level merchantable volume model for Chinese fir plantations. *Forestry*, 11(1), 1-15. DOI:10.1371/journal.pone.0147610.
- Trincado, G., & Leal, C. (2006). Ecuaciones locales y generalizadas de altura diámetro para pino radiata (*Pinus radiata*). *BOSQUE*, 27(1):23-34. DOI:10.4067/S0717-92002006000100003.
- Uzoh, F. (2017). Height-Diameter Model for Managed Even-aged Stands of *ponderosa Pine* for the Western United States Using Hierarchical Nonlinear Mixed-Effects Model. *Aust. J. Basic & Appl. Sci.*, 11(14), 69-87. DOI: 10.22587/ajbas.2017.11.14.10.
- Vargas-Larreta, B., J. Corral-Rivas, Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J.,...Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3): 437-455. DOI:10.5154/r.rchscfa.2017.06.040.
- Vargas-Larreta., B., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., & Cruz-Cobos, F. (2009). A generalized height-diameter model with random coefficients for uneven-aged stands in El Salto, Durango (Mexico). *Forestry*, 8(4), 445-462. DOI:10.1093/forestry/cpp016.

Zhao, W., Mason, E. G., & Brown, J. (2006). Modelling height-diameter relationships of *Pinus radiata* plantations in Canterbury, New Zealand. *NZ Journal of Forestry*, 23–27.

CAPÍTULO III. ECUACIONES DE VOLUMEN PARA *Abies religiosa* (KUNTH) SCHLTDL. & CHAM. EN DISTINTAS ENTIDADES FEDERATIVAS DE MÉXICO

VOLUME EQUATION FOR *Abies religiosa* (KUNTH) SCHLTDL. & CHAM. IN DIFFERENT FEDERATIVE ENTITIES OF MEXICO

Juan Carlos Guzmán-Santiago¹, Oscar Alberto Aguirre-Calderón^{1*}, Javier Jiménez-Pérez¹ y Benedicto Vargas-Larreta^{2*}

1. RESUMEN

Las variables diámetro y altura son factores indispensables en inventarios forestales para determinar el volumen que se almacena en el bosque. El objetivo de esta investigación fue generar ecuaciones para ocho entidades federativas de México que permita estimar de forma precisa el volumen maderable de *Abies religiosa*. Se utilizaron 2,747 datos para ajustar ecuaciones de volumen rollo total árbol, volumen de ramas y volumen total árbol (vrta, vramas y vta). Para la selección del mejor modelo se fijaron los siguientes criterios; coeficiente de determinación ajustada, sesgo, error medio; así como el análisis gráfico y numérico de los residuales. Debido a la falta de información de las ramas, para las entidades de Tlaxcala y Veracruz solo se obtuvo el volumen rollo total árbol. La bondad de ajuste generada por las ecuaciones es confiable, ya que explican más del 93 % a la variable dependiente, los errores son menores a 0.47 m. Estas

¹ Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Forestales, Carretera Nacional #85, Km. 145, Linares, Nuevo León, México, C.P. 67700. ORCID: 0000-0003-0130-2564. charly.230584@gmail.com

¹ Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Forestales, Carretera Nacional #85, Km. 145, Linares, Nuevo León, México, C.P. 67700. ORCID: 0000-0001-5668-8869. oscar.aguirrecl@uanl.edu.mx Autor para correspondencia.

¹ Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ciencias Forestales, Carretera Nacional #85, Km. 145, Linares, Nuevo León, México, C.P. 67700. ORCID: 0000-0001-8020-4342. jjimenez20@gmail.com

² Instituto Tecnológico de El Salto, Mesa del Tecnológico, S/N. C.P. 34942, Pueblo Nuevo Durango, México. ORCID: 0000-0003-1176-7330. vlbene@gmail.com

expresiones son una herramienta útil que podrá ser aplicada por los técnicos forestales en distintos rodales en la zona de estudio.

Palabras clave: árboles, bondad de ajuste, datos dasométricos, precisión, volumen.

ABSTRACT

The variables diameter and height are indispensable factors in forest inventories to determine the volume that is stored in the forest. The objective of this research was to generate an equation for eight federative entities that allows an accurate estimate of the timber volume of *Abies religiosa* in the center and south of the country. 2,747 data were used to adjust equations of total tree roll volume, branch volume and total tree volume (vrta, vramas and vta). The following criteria were set for the selection of the best model; adjusted coefficient of determination, bias, mean error; as well as the graphical and numerical analysis of the residuals. Due to the lack of information on the branches, for the states of Tlaxcala and Veracruz only the total tree roll volume was obtained. The goodness of fit generated by the equations is reliable, since they explain more than 93% to the dependent variable, the errors are less than 0.47 m. These expressions are a useful tool that can be applied by forestry technicians in different stands in the study area.

Keywords: trees, goodness of fit, dasometric data, precision, volume.

2. INTRODUCCIÓN

La información dasométrica obtenida mediante un inventario forestal permite tomar una serie de decisiones para el manejo de la masa arbórea en un determinado periodo para el silvicultor, principalmente para la estimación de volumen (Corral-Rivas y Návar-Chaidez, 2009). La estimación de existencias reales maderables es una actividad importante para el técnico o propietario, ya que además del volumen total del árbol, también es necesario conocer su

distribución comercial (en rollo, aserrado, trituración, entre otros) (Diéguez-Aranda et al., 2009).

Estas ecuaciones aditivas surgen del volumen fustal y de ramas, como parámetros de variables resultantes del diámetro normal a 1.30 m y la altura total (Kitikidou, Milios y Katsogridakis, 2017). En este sentido, la modelación forestal posee la herramienta esencial sobre la cuantificación de los productos generados; esta permite inferir en el crecimiento y desarrollo de las masas a través de la aplicación de tratamientos silvícolas con la intención de mejorar la calidad de cada uno de los individuos de la masa forestal (Quiñonez-Barraza et al., 2015; Valencia-Manzo et al., 2017).

México, contaba hasta hace unas décadas con pocas ecuaciones de crecimiento, principalmente ecuaciones de volumen para distintas especies de regiones de bosques templados, selvas y regiones tropicales, sin embargo, partes de esas ecuaciones en la actualidad están obsoletas; en la mayoría de los casos una sola ecuación solía ser utilizada para varias especies (Cruz-Cobos, Mendía-Santana, Jiménez-Flores, Nájera-Luna y Cruz-García, 2016). Bajo esta problemática, distintas instituciones han colaborado y mostrado interés para desarrollar investigaciones con el objetivo de generar herramientas prácticas, como los modelos biométricos, para apoyar a los manejadores forestales en la obtención de mejores estimaciones de los rendimientos maderables de sus bosques, así como en la toma de decisiones (Vargas-Larreta et al., 2017).

La presente investigación tuvo como objetivo generar ecuaciones para ocho entidades federativas de México que permita estimar de forma precisa el volumen maderable de *Abies religiosa*, misma que fungirá como una herramienta para los técnicos forestales.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Área de estudio

Los sitios de estudio se llevaron a cabo en ocho entidades federativas, con sus respectivas Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR): Guerrero (1203), Puebla

(2101, 2105 y 2108), Tlaxcala (2901 y 2902), Veracruz (3004, 3012), Michoacán (1604, 1605, 1607 y 1608), Jalisco (1404, 1406 y 1410), Hidalgo (1303) y Estado de México (1503, 1507, 1508, 1509 y 1510) (INEGI, 2016). Los datos de todas las UMAFORES en cada entidad se agruparon con la finalidad de llevar a cabo los ajustes.

3.2 Tamaño de muestra

La información de campo se obtuvo de 21 UMAFOR, con un total de 2,747 árboles; mismos que provienen de zonas de aprovechamiento, así como y de áreas no autorizadas para el derribo. Para el primer caso se utilizó el muestreo destructivo consistió en derribar, seccionar y medir los árboles; mientras que para las áreas no autorizadas las mediciones se hicieron en árboles en pie de manera escalonada y con Forcípula láser Haglof Digitech Professional para medir el diámetro a distintas alturas; considerando diferentes categorías diamétricas (Cuadro 1). En cada sitio, el diámetro normal (Dn) fue medido en pie con una cinta diamétrica alemana Forestry Suppliers, Inc. P.O.BOX 8397 y forcípula Haglof Mantax Blue, medido a 1.30 sobre el nivel del suelo; y la altura total (Ht) con el Hipsómetro Haga®; en este caso, los individuos derribados fueron medidos con el flexómetro Uline Accuc-Lock H-1766.

Cuadro 1. Resumen de las variables dasométricas

Entidades	No de árboles	Media	Máximo	Mínimo	Desviación estándar
Diámetro normal (cm)					
Guerrero	162	28.49	72.2	8.7	14.8
Hidalgo	180	37.29	64	8.6	11.27
Jalisco	153	40.98	80	8.5	16.11
México	642	42.68	94	8	21.16
Michoacán	531	41.69	92.3	8	16.86
Puebla	479	43.32	99	5.4	21.98
Tlaxcala	302	32.34	86.5	9.8	15.16
Veracruz	298	32.46	97	8.2	12.08
Altura total (m)					
Guerrero	162	21.5	44.8	7.7	7.94
Hidalgo	180	31.78	43.3	8	6.73

Jalisco	153	26.02	38.8	7.3	7.42
México	642	26.14	52.45	6.2	9.72
Michoacán	531	26.48	46	6.35	7.73
Puebla	479	26.63	50.2	6.1	8.61
Tlaxcala	302	19.01	41.2	5.3	8.94
Veracruz	298	17.34	32.9	7.6	4.28

Para cada árbol se registraron las siguientes variables: diámetro normal medido a 1.3 m sobre el nivel del suelo (D_n , cm), altura total (H_t , en metros), y diámetros con corteza a distintas alturas (d_i , en cm) a lo largo del fuste con respecto al suelo (h_i , en m). Las primeras mediciones se realizaron en dos secciones de 0.30 m por encima del tocón, posterior a eso, la siguiente sección fue en el diámetro normal (1.30 m), y después las secciones fueron cortadas de manera constante a 2.54 m de longitud hasta llegar a la punta del árbol. De igual forma se midieron todas las ramas mayores o iguales a 5 cm, mismas que fueron seccionadas a distintas longitudes (d_{ri} en cm). Tanto los árboles derribados, como los que se midieron en pie, fueron cubicados por secciones, en donde el volumen de cada sección de fuste y de rama se estimó mediante la fórmula de Smalian; las puntas se cubicaron mediante la ecuación del cono. El volumen total del árbol se estimó sumando el volumen del fuste y de las ramas (Vargas-Larreta *et al.*, 2017).

3.3 Ecuaciones ajustadas

Se ajustaron seis ecuaciones para calcular la relación entre el volumen rollo total árbol, y una ecuación para estimar el volumen de ramas (v_{rta} , v_{ramas}); teniendo como variables independientes el diámetro y la altura total. Posteriormente se realizó un ajuste simultáneo para estimar el volumen total de los árboles (v_{ta}) de cada una de las entidades federativas; que consiste en la suma de las ecuaciones anteriores (Cuadro 2). Sin embargo; en las regiones de Tlaxcala y Veracruz, la ecuación de ramas (Ec. 7) se excluyó, ya que no hubo información suficiente.

En seguida se muestran las ecuaciones utilizadas:

Cuadro 2. Ajustes de ecuaciones de volumen (vrta, vramas y vta)

Referencia	Expresión	Ecuación
Spurr Potencial	$V = a_0 * (D * h)^{a_1}$	1
Spurr	$V = a_0 * (D^2 * H)$	2
Schumacher y Hall (alométrica)	$V = a_0 * (D^{a_1} * H^{a_2})$	3
Spurr con término independiente	$V = a_0 + a_1 * (D^2 * H)$	4
Variable combinada generalizada incompleta	$V = a_0 + a_1 * H + a_2 * (D^2 * H)$	5
Honer	$V = \frac{D^2}{a_0 + a_1 H}$	6
Ramas	$V = b_0 * d^2$	7

donde: V= volumen (m³), D= diámetro normal (cm), d= diámetro de ramas (cm), H= altura total (m), a_i = parámetros a ser estimados ($i = 0, 1, 2$).

3.4 Método de ajuste y selección de modelos

Los modelos ajustados fueron de tipo no lineal, ya que desde un punto biológico estas ecuaciones tienen un comportamiento más consistente en la curva (Huang, Titus y Wiens, 1992). La estimación de los parámetros se usó el método de mínimos cuadrados ordinarios (OLNS), ya que esta técnica permite minimizar los errores de los parámetros. Para evitar la convergencia de los parámetros a un óptimo local, se usaron los valores obtenidos por Vargas-Larreta *et al.* (2017). Las ecuaciones fueron ajustadas con el software SAS/ETS® (SAS Institute Inc. 2008). El análisis de la capacidad de ajuste de los modelos se basó en comparaciones numéricas y gráficas.

La expresión de los estadísticos de bondad de ajustes es la siguiente:

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left[\frac{n-1}{n-p-1} \right] \quad 8$$

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}} \quad 9$$

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)}{n}$$

10

donde: R^2_{adj} = coeficiente de determinación ajustada, REMC= Raíz del Error Medio Cuadrático, (\bar{e}) = Sesgo, Y_i = valores observados, \hat{Y}_i = valores predichos, \bar{Y}_i = valores promedio, p = número de parámetros a estimar, n = número de observaciones.

Además, se hizo un análisis gráfico de los residuos frente a los valores predichos de altura total, ya que este procedimiento se considera una de las maneras más eficientes de evaluar la capacidad de ajuste de un modelo (Diéguez-Aranda, Barrio-Anta, Castedo-Dorado y Álvarez-González, 2005; Guzmán-Santiago et al., 2019) al permitir detectar posibles tendencias sistemáticas de los datos, así como para seleccionar factores de ponderación si fuesen necesarios debido a la presencia de heterocedasticidad (Neter, Kutner, Nachtsheim y Wasserman, 1996).

3.5 Corrección de heterocedasticidad

Para garantizar las estimaciones de los parámetros se procedió a corregir el efecto de heterocedasticidad (varianza no constante), para lo cual se realizó una ponderación aplicando los mismos pesos a la inversa de la varianza de cada observación. La varianza desconocida se estimó con la función potencial $\sigma_i^2 = \gamma \times X^k$. Los valores de γ y del exponente k se optimizaron empleando los errores del modelo ajustado sin pesos como variable dependiente en el modelo potencial de varianza del error (Harvey, 1976). Finalmente, el peso considerado fue $1/D^2$ para la ecuación de volumen de las ramas con corteza y $1/D^2 * H$ para la ecuación de volumen rollo total árbol.

4. RESULTADOS

4.1 Ecuaciones ajustadas

Estadísticamente el modelo de Spurr Potencial (Ec. 1) fue ligeramente superior que el resto de las ecuaciones; sin embargo, en el análisis gráfico causó algunos problemas de precisión. Por lo anterior, en las entidades de Jalisco, México y Puebla se seleccionó la ecuación de Schumacher y Hall (1933) (Ec. 3); mientras que en Guerrero, Hidalgo, Michoacán, Tlaxcala y Veracruz se optó por la ecuación 1, ya que mostró excelentes resultados. En este sentido, la ecuación 3 en el volumen de rollo total árbol (vrta) presentó un sesgo que va de 0.028 a 0.034 m³, con una raíz de error medio cuadrático (REMC) menor a 0.44 m³, así como un coeficiente de determinación ajustada (R^2_{adj}) de 96%, respectivamente (Cuadro 3).

Para el volumen de ramas (vramas), el sesgo es menor a 0.001 m³; mientras que la REMC promedio corresponde a 0.08 m³; además presentó una R^2_{adj} superiores a 0.44 (Cuadro 4). Como consecuencia en el volumen total árbol (vta) se obtuvo un sesgo promedio de 0.033 m³, donde la bondad de ajuste es aceptable estadísticamente ($REMC < 0.45$ m³; $R^2_{adj} = 96\%$). Para el caso del modelo 1, el sesgo se encuentra entre -0.008 y 0.01 m³, mismo que muestra una REMC menor a 0.45 m³, y un 93% de la varianza total de la variable explicada en el vrta. Además, se observa en el volumen de ramas (vramas), que el sesgo está por debajo de -0.002, con errores que oscila entre 0.04 y 0.12 m³ ($R^2_{adj} > 0.25$), y que por consecuencia se refleja en el Vta la capacidad del modelo de explicar a la variable (Cuadro 5).

Cuadro 3. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del Volumen rollo total árbol (Vrta)

Entidades	P	EP	EE	T	P-Valor	Vrta			
						\bar{e}	REMC	R^2_{adj}	Ec
Guerrero	a ₀	0.00004	0.000002	18.95	< 0.0001	0.01263	0.17	0.98	1
	a ₁	1.50678	0.007420	202.97	< 0.0001				
	b ₀	0.00003	0.000002	11.46	< 0.0001				
Hidalgo	a ₀	0.00003	0.000002	12.23	< 0.0001	-0.00603	0.22	0.96	1
	a ₁	1.55023	0.011200	138.44	< 0.0001				
	b ₀	0.00002	0.000001	11.86	< 0.0001				
Jalisco	a ₀	0.00007	0.000006	12.10	< 0.0001	0.02802	0.26	0.96	3
	a ₁	1.81731	0.026700	68.04	< 0.0001				
	a ₂	0.96656	0.040600	23.82	< 0.0001				

	b ₀	0.00004	0.000003	14.97	< 0.0001				
	a ₀	0.00007	0.000003	26.00	< 0.0001				
México	a ₁	1.79199	0.017700	101.23	< 0.0001	0.03074	0.44	0.96	3
	a ₂	1.01380	0.024100	42.09	< 0.0001				
	b ₀	0.00003	0.000001	29.77	< 0.0001				
	a ₀	0.00003	0.000002	13.89	< 0.0001				
Michoacán	a ₁	1.54889	0.009630	160.89	< 0.0001	0.01995	0.45	0.93	1
	b ₀	0.00005	0.000002	21.85	< 0.0001				
	a ₀	0.00006	0.000004	17.86	< 0.0001				
Puebla	a ₁	1.75637	0.019300	91.00	< 0.0001	0.03441	0.41	0.96	3
	a ₂	1.06774	0.031900	33.49	< 0.0001				
	b ₀	0.00004	0.000002	24.72	< 0.0001				
	a ₀	0.00009	0.000005	18.25	< 0.0001				
Tlaxcala	a ₁	1.41699	0.007880	179.86	< 0.0001	0.00971	0.24	0.96	1
	a ₀	0.00003	0.000001	21.83	< 0.0001				
Veracruz	a ₁	1.58643	0.006270	253.14	< 0.0001	-0.00835	0.18	0.96	1
	a ₀	0.00003	0.000001	21.83	< 0.0001				

Cuadro 4. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del Volumen de ramas (Vramas)

Entidades	P	EP	EE	T	P-Valor	Vramas			
						\bar{e}	REMC	R ² _{adj}	Ec
Guerrero	a ₀	0.00004	0.000002	18.95	< 0.0001	-0.00004	0.04	0.39	1
	a ₁	1.50678	0.007420	202.97	< 0.0001				
	b ₀	0.00003	0.000002	11.46	< 0.0001				
Hidalgo	a ₀	0.00003	0.000002	12.23	< 0.0001	-0.00008	0.04	0.30	1
	a ₁	1.55023	0.011200	138.44	< 0.0001				
	b ₀	0.00002	0.000001	11.86	< 0.0001				
Jalisco	a ₀	0.00007	0.000006	12.10	< 0.0001	0.00311	0.07	0.44	3
	a ₁	1.81731	0.026700	68.04	< 0.0001				
	a ₂	0.96656	0.040600	23.82	< 0.0001				
	b ₀	0.00004	0.000003	14.97	< 0.0001				
México	a ₀	0.00007	0.000003	26.00	< 0.0001	0.00143	0.08	0.47	3
	a ₁	1.79199	0.017700	101.23	< 0.0001				
	a ₂	1.01380	0.024100	42.09	< 0.0001				
	b ₀	0.00003	0.000001	29.77	< 0.0001				
Michoacán	a ₀	0.00003	0.000002	13.89	< 0.0001	-0.00223	0.12	0.25	1
	a ₁	1.54889	0.009630	160.89	< 0.0001				
	b ₀	0.00005	0.000002	21.85	< 0.0001				
Puebla	a ₀	0.00006	0.000004	17.86	< 0.0001	0.00311	0.09	0.49	3
	a ₁	1.75637	0.019300	91.00	< 0.0001				
	a ₂	1.06774	0.031900	33.49	< 0.0001				
	b ₀	0.00004	0.000002	24.72	< 0.0001				

Cuadro 5. Parámetros y estadísticos de bondad de ajuste del Volumen total árbol (Vta)

Entidades	P	EP	EE	T	P-Valor	Vta			
						\bar{e}	REMC	R ² _{adj}	Ec
Guerrero	a ₀	0.00004	0.000002	18.95	< 0.0001	0.01259	0.17	0.98	1
	a ₁	1.50678	0.007420	202.97	< 0.0001				
	b ₀	0.00003	0.000002	11.46	< 0.0001				
Hidalgo	a ₀	0.00003	0.000002	12.23	< 0.0001	-0.00611	0.23	0.96	1
	a ₁	1.55023	0.011200	138.44	< 0.0001				
	b ₀	0.00002	0.000001	11.86	< 0.0001				
Jalisco	a ₀	0.00007	0.000006	12.10	< 0.0001	0.03114	0.28	0.96	3
	a ₁	1.81731	0.026700	68.04	< 0.0001				
	a ₂	0.96656	0.040600	23.82	< 0.0001				

	b ₀	0.00004	0.000003	14.97	< 0.0001				
	a ₀	0.00007	0.000003	26.00	< 0.0001				
México	a ₁	1.79199	0.017700	101.23	< 0.0001	0.00321	0.45	0.96	3
	a ₂	1.01380	0.024100	42.09	< 0.0001				
	b ₀	0.00003	0.000001	29.77	< 0.0001				
	a ₀	0.00003	0.000002	13.89	< 0.0001				
Michoacán	a ₁	1.54889	0.009630	160.89	< 0.0001	0.01771	0.47	0.93	1
	b ₀	0.00005	0.000002	21.85	< 0.0001				
	a ₀	0.00006	0.000004	17.86	< 0.0001				
Puebla	a ₁	1.75637	0.019300	91.00	< 0.0001	0.03752	0.45	0.96	3
	a ₂	1.06774	0.031900	33.49	< 0.0001				
	b ₀	0.00004	0.000002	24.72	< 0.0001				
	a ₀	0.00006	0.000004	17.86	< 0.0001				

donde: P= parámetros, EP= estimador de parámetros, EE= error estándar, P>t = Valor de la probabilidad de la distribución de la *t* de Student, \bar{e} = sesgo, REMC= raíz del error medio cuadrático, R^2_{adj} = coeficiente de determinación ajustada.

4.2 Comparación entre entidad federativa

En la Figura 1 se aprecia las curvas de ajuste de la ecuación 1 sobre los datos de campo de cada una de las entidades, donde en los sitios de Guerrero (a) e Hidalgo (b) se obtuvieron categorías diamétricas hasta de 70 cm; así como un volumen total máximo de 7 y 6 metros cúbicos (m³), aproximadamente. Para la entidad de Michoacán (e) se obtuvo información de volumen de 13 m³ con categorías máximas de 95 cm. Por otra parte, en Tlaxcala (g) el volumen rollo total árbol (vrta) fue de 5.7 m³, ligeramente superior en que Veracruz (h), donde generó un volumen 3.6 m³.

La ecuación 3 estima una buena proyección sobre los datos provenientes de la ciudad de México (d) y Puebla (f), en donde ambos obtuvieron volumen de 12.3 m³ con categorías de hasta 95 cm; mientras que en Jalisco (c) hubo una menor cantidad volumétrica (6.7 m³) con diámetros menores a 80 cm. En las ciudades de México, Puebla y Michoacán se aprecia la mayor concentración en volumen maderable, además en Hidalgo y Tlaxcala se observa que no existe una marcada diferencia a pesar de que el segundo sitio (g) no contiene información de ramas; esto quizás se deba por la cantidad de muestras obtenidas.

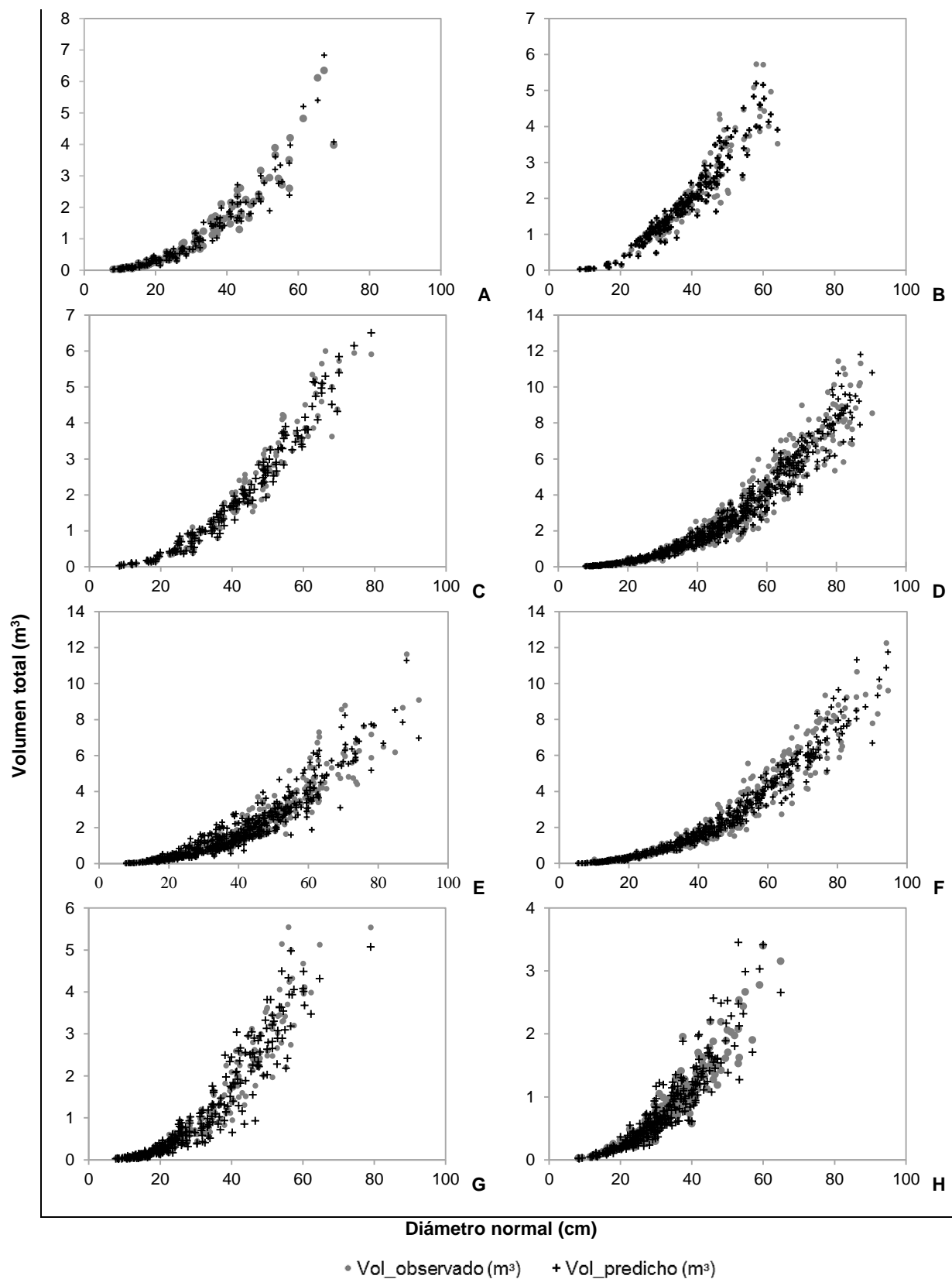


Figura 1. Volúmenes observados vs predichos: **A=** Guerrero, **B=** Hidalgo, **C=** Jalisco, **D=** México, **E=** Michoacán, **F=** Puebla, **G=** Tlaxcala, **H=** Veracruz.

4.3 Evolución del sesgo

En la Figura 2 se observa que el sesgo generada por la ecuación 1, para las entidades de Guerrero (a) y Michoacán (e) se encuentra cercano a cero en diámetros que van de 5 a 45 cm; mientras que en datos de 50 a 63 cm el modelo subestima con un grado de error más notable; a partir de diámetros superiores a 64 se observa marcadamente el grado de sobreestimación. En el caso de Hidalgo (b) el grado de error se observa con más claridad en categorías mayores de 40 cm, mientras que en Tlaxcala (g) tiene una distribución normal (cercano a cero) en diámetros de 5 a 59 cm, y en categorías mayores a 60 cm el modelo tiende a subestimar la información volumétrica (v_{rta}), sobre todo en diámetro 64 ya que alcanza un error de 0.62 m^3 .

Para el caso de Veracruz (h) el sesgo prácticamente es nulo en árboles con categorías menores a 49 cm; sin embargo, en diámetros de 50 a 59 cm se observa una ligera sobreestimación. Los errores con subestimación notable se presentan en los datos mayores a 60 cm.

De igual forma se comporta la ecuación 3 para la entidad de Jalisco (c), sobreestima ligeramente los datos en diámetros menores a 37 cm, mientras que categorías de 38 a 69 se observa la subestimación; en diámetros mayores a 70 sucede todo lo contrario tomando valores de -0.20 . En la ciudad de México (d), el margen de error notable se presenta en diámetros superiores a 40 cm, ya que subestiman el volumen con un error de 0.30 m^3 . Por otra parte, en Puebla (f) se observa que el modelo estima adecuadamente en categorías menores a 50 cm; mientras que en categorías de 55 a 78 cm tiende a subestimar el volumen hasta de 0.50 m^3 , de igual forma para diámetros mayores a 79 cm se observa una distribución con margen de error de -0.58 a 0.39 m^3 .

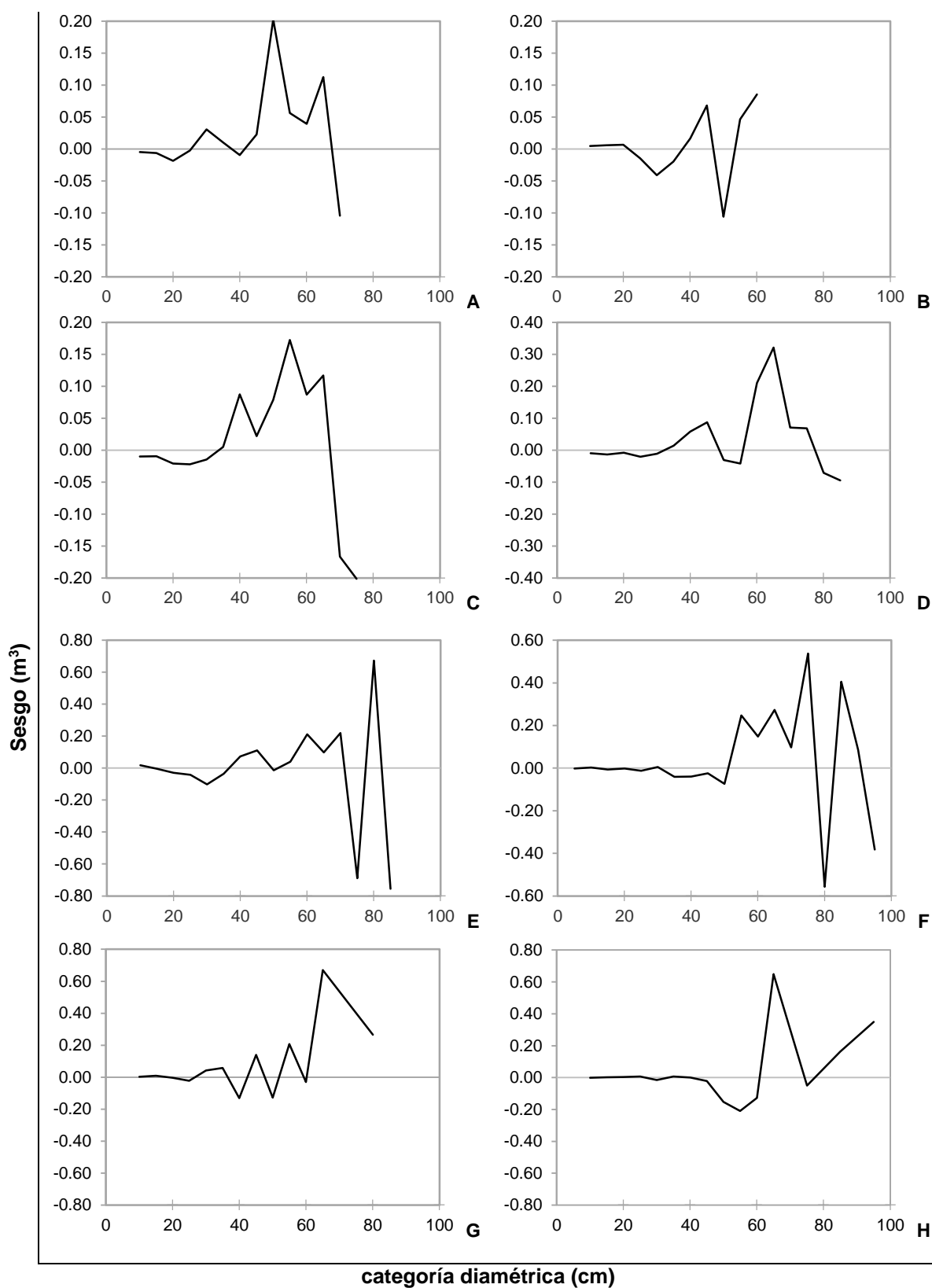


Figura 2. Sesgos de categorías diamétricas: **A=** Guerrero, **B=** Hidalgo, **C=** Jalisco, **D=** México, **E=** Michoacán, **F=** Puebla, **G=** Tlaxcala, **H=** Veracruz

4.4 Evolución de la Raíz del error medio cuadrático (REMC)

La ecuación de Spurr Potencial (Ec. 1) tiene en general un buen comportamiento sobre las clases diamétricas; se observa que, para las entidades de Guerrero (a) e Hidalgo (b) en diámetros menores a 19 cm presentan errores mínimos; sin embargo, de 20 a 59 cm tiende a subir de forma constante; mientras que para categorías de 65 en el sitio a, presenta el error más alto 0.62 m^3 y luego la curva disminuye con aproximación a cero. En el caso del sitio b, el punto más alto de error está en diámetro de 50 cm; y no tiene un comportamiento constante para el resto de las categorías; al igual que en Michoacán (e) donde el modelo prácticamente tiende a incrementar ligeramente hasta las categorías de 80 cm. Para el caso de Tlaxcala (g) y Veracruz (h), se observa que en ambos sitios el error tiende a incrementar a medida que aumentan las categorías diamétricas, alcanzando su máximo error (0.65 m^3) en diámetros de 65 cm (G) y 55 cm (0.77 m^3) para el sitio h, y posteriormente tienden a decrecer.

Para la ecuación de Schumacher y Hall (Ec. 3) para la zona de Jalisco (c) se observa que el error mayor se presenta en las categorías de 65 cm, ya que alcanza un error de 0.65 m^3 ; esto también se puede apreciar en los sitios de la ciudad de México (d) y Puebla (f), donde los errores crecen ligeramente conforme aumentan las categorías diamétricas; aunque no se ve afectada en gran medida la estimación, ya que la mayoría de los árboles son de categorías menores a 70 cm, tal como se muestra en el estudio realizado por Pineda-López, Ortega-Solís, Sánchez-Velásquez, Ortiz-Ceballos y Vázquez-Domínguez (2013), donde la mayoría de los árboles se encuentran diámetros de 10 a 35 cm.

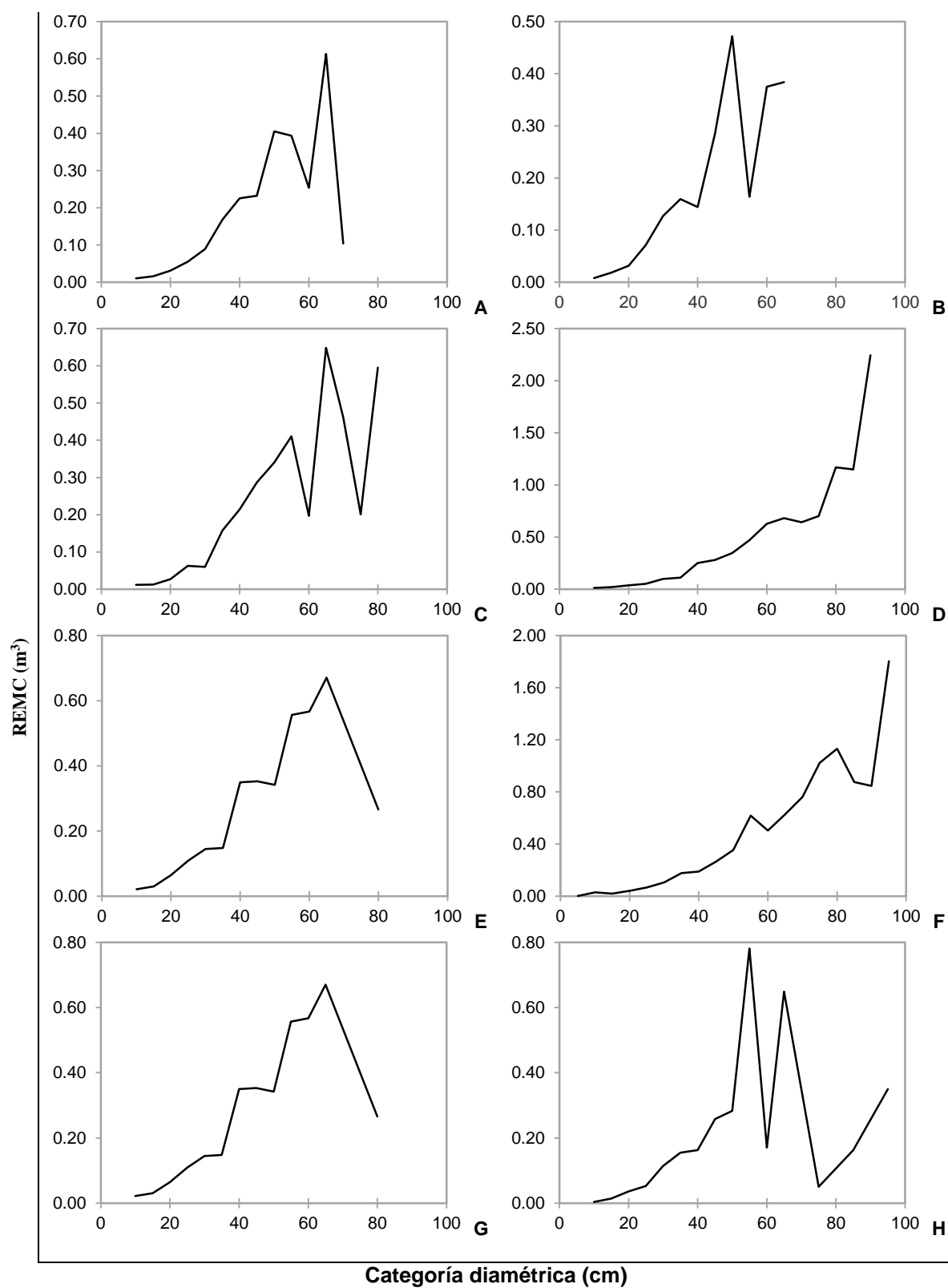


Figura 3. Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) de categorías diamétricas: **A=** Guerrero, **B=** Hidalgo, **C=** Jalisco, **D=** México, **E=** Michoacán, **F=** Puebla, **G=** Tlaxcala, **H=** Veracruz.

5. DISCUSIÓN

La bondad de ajuste de las ecuaciones analizadas resultó altamente significativa ($p < 0.0001$), por lo que la información generada es adecuada para su aplicación en las áreas de estudio. En efecto, varios estudios de caso muestran que con las ecuaciones aditivas es posible estimar el volumen total (Ecs. 1-7 y 3-7) (Fang y Bailey, 2001; Özçelik y Göçeri, 2015). Este ajuste simultáneo permitió obtener predicciones consistentes debido a la flexibilidad (Tang et al., 2016; Hernández-Ramos et al., 2017a) con excepción para las entidades de Tlaxcala y Veracruz. Con las ecuaciones generadas se logra una mayor precisión y se evita pérdidas económicas que en ocasiones ocurren a partir de las sub o sobreestimaciones (Vásquez-Bautista, Zamudio-Sánchez, Alvarado-Segura y Romo-Lozano, 2016). Bajo esta perspectiva, la ecuación de Schumacher y Hall (1933), y de Spurr Potencial fueron las mejores, mismas que son respaldadas por otros autores (Parresol, Hotvedt y Cao, 1987; Fang y Bailey, 2001; Özçelik y Göçeri, 2015; Hernández-Ramos et al., 2017b) en estudios similares.

Los resultados obtenidos por Vargas-Larreta et al. (2017) sobre esta especie se encuentran disponible; en la plataforma digital denominado Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor, 2016); donde las ecuaciones están clasificadas para 21 UMAFOR en las entidades de estudio. Donde se observa que en la bondad de ajuste, el coeficiente de determinación (R^2_{adj}) supera el 96% y la Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) es menor a 0.49 metros en promedio, todas con la ecuación de Schumacher y Hall (Ec. 3). Ante esta circunstancia se planteó buscar una regresión que permitiera obtener resultados similares o superiores a nivel entidad o nacional; por lo que en este análisis se llegó a la conclusión de que estadísticamente no existen diferencias en cuanto a la bondad de ajuste en comparación con el SiBiFor (2016); lo cual, el modelo de Spurr Potencial (Ec. 1) fue el más aceptado en la mayoría de los casos, que presentó en promedio un R^2_{adj} es superior a 93% y una REMC de 0.47 metros; seguido por la expresión 3, que presentó un R^2_{adj} de 96% y una REMC de 0.45 metros. Por lo tanto, es posible ampliar el uso de las ecuaciones a nivel de entidad sin problema;

independientemente de la variedad de las masas en distintos sitios (Kitikidou et al., 2017).

La respuesta a la buena bondad de ajuste de ambas ecuaciones se debe a que biológicamente son flexibles en su aplicación por tener pocos parámetros (Vanclay, 1994, Fernández, Fassola y García, 2011), además de describir de forma geométrica el árbol (Spurr, 1952; Tlaxcala-Méndez, Santos-Posadas, Hernández-De la Rosa y López-Ayala 2016). Otra ventaja es que estas ecuaciones son válidas para modelar especies tropicales (Cruz-Cobos et al., 2016; Mayaka, Eba'a-Atyi y Momo, 2017), templadas o latifoliadas (Crecente-Campo, Corral-Rivas, Vargas-Larreta y Wehenkel, 2014); además cumple con la condición, cuando el modelo el pasa al origen, el volumen tiende a cero si la variable independiente es cero (Prodan, Peters, Cox y Real, 1997); también al ser menos complejas y de cumplir con los supuestos de regresión generan ganancias significativas (Salas, Nieto y Irisarri, 2005; Honorato-Salazar, 2011; Barrios, López y Nieto, 2014).

Estos casos de estudios se encuentran, en los trabajos de Akindele y LeMay (2006) en Nigeria; así como en plantaciones de *Eucalyptus grandis* en Salento, Quindío de Bogota, y *Populus* spp. en el Delta del Paraná, Argentina (Fernández et al., 2011); modelada por la ecuación 3 (Barrios et al., 2014). Por otra parte, Da Cunha y Guimarães-Finger (2009) optó por la ecuación 1 para estimar el volumen de *Pinus taeda* en Brasil, donde obtuvo un R^2_{adj} de 0.98. Otra evidencia, se encuentra en la investigación de Hernández-Ramos et al. (2017b) donde señalan que las ecuaciones 1 y 3 fueron las mejores para la estimación de volumen en *Eucalyptus urophylla* y de *Swietenia macrophylla* (Hernández-Ramos et al., 2018); ambas en México.

Así mismo, la ecuación 3 modeló a las especies de *Arbutus* spp (Cruz-Cobos et al., 2016); al igual que para 12 especies en Durango según Simental-Cano et al. (2017). Esto complementa el trabajo de Tapia y Navar (2011), donde señalan, que obtuvieron buenas estimaciones (R^2_{adj} 0.95 y REMC es 0.13) para volumen total y comercial de *Pinus pseudostrobus* de la Sierra Madre Oriental del estado de Nuevo León; además es idónea para las especies *Pinus lawsonii* y *P. oocarpa*

en la sierra Purépecha, Michoacán (Ramos-Uvilla et al., 2014). También, se puede constatar con el trabajo de Vásquez-Fabian, Rodríguez-Ortiz, Enríquez-del Valle, Campos-Ángeles y Santana-Flores (2017) para la especie.

6. CONCLUSIÓN

Las ecuaciones generadas permiten evaluar parcial o totalmente el volumen de la masa forestal de sitios de interés. De acuerdo, a la bondad de ajuste y del análisis gráfico para estimar el volumen total árbol (vta), la ecuación de Spurr Potencial fue seleccionada para las entidades de Guerrero, Hidalgo, Michoacán, Tlaxcala y Veracruz. De igual forma el modelo de Schumacher fue seleccionado para ser utilizada en los sitios de Jalisco, ciudad de México y Puebla. Para las ciudades de Tlaxcala y Veracruz se estimó el volumen rollo total árbol (vrta) debido a que no se tuvo información suficiente de las ramas.

Agradecimiento

Los autores agradecen al coordinador del proyecto, denominado Desarrollo de un sistema biométrico para la planeación del manejo forestal sustentable de los ecosistemas con potencial maderable en México, dirigido por Dr. Benedicto Vargas Larreta, investigador titular del Instituto Tecnológico de El Salto, Durango, por facilitar la información de campo. De igual forma se le agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por apoyo económico en la etapa de formación académica.

Conflicto de intereses

Cada uno de los autores declararon no tener ningún inconveniente con el manuscrito

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Akindele, S. O. y LeMay, V. M. (2006).** Development of tree volume equations for common timber species in the tropical rain forest area of Nigeria. *Forest Ecology and Management*, 226(1), 41-48. DOI:10.1016/j.foreco.2006.01.022.
- Barrios, A., López, A. M. y Nieto, V. (2014).** Predicción de volúmenes comerciales de *Eucalyptus grandis* a través de modelos de volumen total y de razón. *Colombia forestal*, 17(2), 137-149. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=423939663002>.
- Corral-Rivas, S. y Návar-Cháidez, J. D. (2009).** Comparación de técnicas de estimación de volumen fustal total para cinco especies de pino de Durango, México. *Revista Chapingo. Serie ciencias forestales y del ambiente*, 15(1), 5-13. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/pdf/rcscfa/v15n1/v15n1a1.pdf>.
- Crecente-Campo, F., Corral-Rivas, J., Vargas-Larreta, B. y Wehenkel, C. (2014).** Can random components explain differences in the height–diameter relationship in mixed uneven-aged stands?. *Annals of Forest Science*, 71(1), 51-70. DOI:10.1007/s13595-013-0332-6.
- Cruz-Cobos, F., Mendía-Santana, R., Jiménez-Flores, J. Nájera-Luna, J. A. y Cruz-García, F. (2016).** Ecuaciones de volumen para *Arbutus spp.* (madroño) en la región de Pueblo Nuevo, Durango. *Investigación y Ciencia*, 24(68), 41-47. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67448742006>.
- Da Cunha, T. A. y Guimarães-Finger, C. A. (2009).** Modelo de regresión para estimar el volumen total con corteza de árboles de *Pinus taeda* L. en el sur de Brasil. *Revista Forestal Mesoamericana Kurú*, 6(16), 1-15. Recuperado de: <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/kuru/article/view/400>.
- Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Castedo-Dorado, F y Álvarez-González, J. (2005).** Relación altura-diámetro generalizada para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de repoblación en el noroeste de España. *Forest Systems*, 14(2), 229-241. Recuperado de:

[http://www.inia.es/GCONTREC/PUB/229-241-\(154_04\)-
Relacion_1162281472578.pdf](http://www.inia.es/GCONTREC/PUB/229-241-(154_04)-Relacion_1162281472578.pdf).

- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., ... Sánchez-Rodríguez, F.** (2009). *Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Galicia, España. Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural. 273 p. Recuperado de: [www.usc.es/.../Herramientas silvicolas para la gestion forestal sostenible en galicia](http://www.usc.es/.../Herramientas_silvicolas_para_la_gestion_forestal_sostenible_en_galicia).
- Fang, Z. y Bailey, R. L.** (2001). Nonlinear mixed effects modeling for slash pine dominant height growth following intensive silvicultural treatments. *Forest science*, 47(3), 287-300. DOI:[10.1093/forestscience/47.3.287](https://doi.org/10.1093/forestscience/47.3.287).
- Fernández, E., Fassola, E. y García, M.** (2011). Ecuación de volumen total para *Populus deltoides* de plantaciones del Bajo Delta del Paraná. *RIA. Revista de Investigaciones Agropecuarias*, 37(2), 172-179. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=86421189010>.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., González-Tagle, M. A., Treviño-Garza, E. J., Jiménez-Pérez, J., Vargas-Larreta, B., ... Santos-Posada, H. M.** (2019). Relación altura-diámetro para *Abies religiosa* Kunth Schltdl. & Cham. en el centro y sur de México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 10(52), 100-120. DOI:[10.29298/rmcf.v10i52.483](https://doi.org/10.29298/rmcf.v10i52.483).
- Harvey, A. C.** (1976). Estimating regression models whit multiplicative heteroscedastiticity. *Econometrica*, 44, 461-465. DOI: [10.2307/1913974](https://doi.org/10.2307/1913974).
- Hernández-Ramos, J., Hernández-Ramos, A., García-Magaña, J., García-Cuevas, X., García-Espinoza, G., Muñoz-Flores, H., ... Olvera-Delgadillo, E.** (2017a). Sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial para plantaciones de *Pinus greggii* Engelm. en Hidalgo, México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 8(39), 59-70. DOI:[10.29298/rmcf.v8i39.43](https://doi.org/10.29298/rmcf.v8i39.43).
- Hernández-Ramos, J., Santos-Posadas, H. M., Valdéz -Lazalde, J. R., Tamarit-Urias, J. C., Ángeles-Pérez, G., Hernández-Ramos, A., ... Peduzzi, A.** (2017b). Estimación del volumen comercial en plantaciones de

Eucalyptus urophylla con modelos de volumen total y de razón. *Agrociencia*, 51(5), 561-580. Recuperado de: <http://www.scielo.org.mx/pdf/agro/v51n5/1405-3195-agro-51-05-00561-en.pdf>.

Hernández -Ramos, J., Hernández-Ramos, A., García-Cuevas, X., Tamarit-Urías, J. C., Martínez-Ángel, L. y García-Magaña, J. (2018). Ecuaciones de volumen total y de razón para estimar el volumen comercial de *Swietenia macrophylla* King. *Colombia Forestal*, 21(1), 34-46. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=423954588003>.

Honorato-Salazar, J. A. (2011). Modelos volumétricos fustales para *Acrocarpus fraxinifolius* Wight & Arn. en plantaciones agroforestales de la Sierra Norte de Puebla. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 2(6), 55-71. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-11322011000400006&lng=es&tlng=.

Huang, S., Titus, S. y Wiens, D. (1992). Comparison of nonlinear height-diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 22, 1297-1304. DOI:[10.1139/x92-172](https://doi.org/10.1139/x92-172).

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2016). Compendio de información geográfica. Recuperado de: 09-10-2017 en www.internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/Productos/...2016/702825087357.pdf.

Kitikidou, K., Milios, E. y Katsogridakis, S. (2017). Meta-analysis for the volume of *Pinus sylvestris* in Europe. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(1), 23-34. DOI:[10.5154/r.rchscfa.2015.11.052](https://doi.org/10.5154/r.rchscfa.2015.11.052).

Mayaka, T. B., Eba'a-Atyi, R. y Momo, S. T. (2017). Construction of multispecies allometric equations: Is there a statistical palliative for destructive tree sampling?. *Journal of Tropical Forest Science*, 29(3), 282-296. DOI:[10.26525/jtfs2017.29.3.282296](https://doi.org/10.26525/jtfs2017.29.3.282296).

Neter, J., Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J. y Wasserman, W. (1996). Applied Linear Statistical Models. 4th edn . McGraw-Hill, New York. Recuperado de:

[https://www.scirp.org/\(S\(czeh2tfqyw2orz553k1w0r45\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1143469](https://www.scirp.org/(S(czeh2tfqyw2orz553k1w0r45))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=1143469).

Özçelik, R. y Göçeri, M. F. (2015). Compatible merchantable stem volume and taper equations for *Eucalyptus* sp. plantations in the Eastern Mediterranean Region of Turkey. *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 39(6), 851-863. DOI:10.3906/tar-1501-27.

Parresol, B. R., Hotvedt, J. E. y Cao, Q. V. (1987). A volume and taper prediction system for bald clonal grouping. *Forest Ecology and Management*, 432, 30-39. DOI:[10.1016/j.foreco.2018.08.051](https://doi.org/10.1016/j.foreco.2018.08.051).

Pineda-López, M. D. R., Ortega-Solís, R., Sánchez-Velásquez, L. R., Ortiz-Ceballos, G. y Vázquez-Domínguez, G. (2013). Estructura poblacional de *Abies religiosa* (Kunth) Schltdl. et Cham., En el ejido el conejo del parque nacional cofre de Perote, Veracruz, México. *Revista Chapingo serie ciencias forestales y del ambiente*, 19(3), 375-385. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=62929720005>.

Prodan, M., Peters, R., Cox, F. y Real, P. (1997). Mensura Forestal. GTZ/IICA. *Serie Investigación y Educación en Desarrollo Sostenible*. San José, Costa Rica. 511 p. Recuperado de: https://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=0BfaTECpREEC&oi=fnd&pg=PR13&ots=geINc9bHAm&sig=ZPDbcQ1ASvxhc4o_XTiQoxcHCUC&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

Quiñonez-Barraza, G., Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G. y Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439-454. Recuperado de: <https://www.colpos.mx/agrocien/Bimestral/2015/may-jun/art-7.pdf>.

Ramos-Uvilla, J. A., García-Magaña, J. J., Hernández-Ramos, J., García-Cuevas, X., Velarde-Ramírez, J. C., Muñoz-Flores, H. J.,... García Espinoza, G. G. (2014). Ecuaciones y tablas de volumen para dos especies de *Pinus* de la Sierra Purhépecha, Michoacán. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 5(23), 92-109. Recuperado de:

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2007-11322014000300008&lng=es&tlng=es.

Salas, C., Nieto, L. y Irisarri, A. (2005). Modelos de volumen para *Pinus pinaster* Ait. en la Comarca del Baixo Miño, Galicia, España. *Quebracho-Revista de Ciencias Forestales*, (12), 11-22. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=48101201>.

SAS Institute Inc. (2008). SAS/STAT® 9.2 User's Guide Second Edition. Raleigh, NC, EE. UU.: SAS Institute Inc. s/p. Recuperado de: <https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63033/HTML/default/viewer.htm>.

Schumacher, F. X. y Hall, F. S. (1933). Logarithmic expression of timbertree volume. *Journal Agriculture Research*, 47(9), 719-734. Recuperado de: <https://ci.nii.ac.jp/naid/10029733560/>.

Simental-Cano, B., López-Sánchez, C. A., Wehenkel, C., Vargas-Larreta, B., Álvarez-González, J. G. y Corral-Rivas, J. J. (2017). Species-specific and regional volume models for 12 forest species in Durango, Mexico. *Revista Chapingo. Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(2), 155-171. DOI:10.5154/r.rchscfa.2016.01.004.

Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor). (2016). Biblioteca digital del sistema biométrico para la planeación del manejo forestal sustentable de los ecosistemas con potencial maderable en México. Recuperado de: <http://fcfposgrado.ujed.mx/sibifor/inicio/buscar.php>.

Spurr, S. H. (1952). Forest inventory. John Wiley and sons. New York. 476 pp.

Tang, X., Pérez-Cruzado, C., Torsten, V., Fehrmann, L., Álvarez-González, J.G. y Kleinn, C. (2016). Development of a compatible taper function and stand-level merchantable volume model for Chinese fir plantations. *Forestry*, 11(1), 1-15. DOI:10.1371/journal.pone.0147610.

- Tapia, J. y Návar, J.** (2011). Ajuste de modelos de volumen y funciones de ahusamiento para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en bosques de pino de la Sierra Madre Oriental de Nuevo León, México. *Foresta Veracruzana*, 13(2), 19-28. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49721457004>.
- Tlaxcala-Méndez, R.M., Santos-Posadas, H.M., Hernández-De la Rosa, P. y López-Ayala, J.L.** (2016). Variación del factor de forma y el ahusamiento en procedencias de cedro rojo (*Cedrela odorata* L.). *Agrociencia*, 50(1), 89-15. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952016000100089&lng=es&tlng=es.
- Valencia-Manzo, S., Trujillo-Gómez, S. A., Cornejo-Oviedo, E. H., Flores-López, C., Díaz-Balderas, J. A. y González-López, H. D.** (2017). Ecuación de pressler para estimar volumen de fuste en árboles de *Pinus patula* Schl. et Cham. var. *longepedunculata* Look. *Foresta Veracruzana*, 19(1), 29-34. Disponible en: Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49752128005>.
- Vancley, J. K.** (1994). Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forests. *School of Environmental Science and Management Papers*, 537. Recuperado de: http://epubs.scu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1538&context=esm_pubs.
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J., Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., ... Aguirre-Calderón, C. G.** (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455. DOI:10.5154/r.rchscfa.2017.06.040.

Vásquez-Bautista, N., Zamudio-Sánchez, F. J., Alvarado-Segura, A. A. y Romo-Lozano, J. L. (2016). Forest biometric models in Hidalgo, Mexico: State of the art. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 22(3), 351-367. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2015.09.043.

Vásquez-Fabian, S. A., Rodríguez-Ortiz, G., Enríquez-del Valle, J. R., Campos-Angeles, G. V. y Santana-Flores, A. (2017). Volumen y biomasa aérea de *Pinus pseudostrobus* y *P. teocote* del sur de Oaxaca. *Revista Mexicana de Agroecosistemas*, 4 (2), 164-172. Disponible en http://www.voaxaca.tecnm.mx/revista/docs/RMAE%20vol%204_2_2017/7%20RMAE_2017-15-Biomasa-To%20edit.pdf.

CAPÍTULO IV. RELACIÓN DEL PERFIL FUSTAL Y VOLUMEN PARA *Abies religiosa* EN DISTINTAS UNIDADES DE MANEJO FORESTAL DE MÉXICO

RELATION OF THE FUSTAL PROFILE AND VOLUME FOR *Abies religiosa* IN DIFFERENT FOREST MANAGEMENT UNITS OF MEXICO

1. RESUMEN

A pesar de que existe un portafolio con una serie de ecuaciones sobre diversos sistemas biométricos, es necesario reforzar la información sustentada con respecto al volumen maderable. El objetivo del presente estudio es generar un modelo compatible que permita estimar de forma precisa el volumen-ahusamiento de *Abies religiosa* en distintas entidades federativas de México. Se utilizaron 2, 608 datos para describir el perfil fustal de los árboles; en la que se realizó un ajuste local cuadrático no paramétrico utilizando la regresión local LOESS con un parámetro suavizado de 0.3, para tener una mayor certeza sobre la distribución de los datos. Posteriormente, se hizo un ajuste simultáneo utilizando el procedimiento aparentemente no relacionada (SUR) en el software SAS para la estimación del volumen a distintas alturas en función del diámetro. Finalmente se realizó la corrección de la heterocedasticidad para evitar cualquier anomalía durante el proceso de ajuste.

La bondad de ajuste de las ecuaciones indica que son confiables para cada UMAFOR, ya que el modelo explica más del 97% (R^2_{adj}) en ambas variables dependientes, así como el buen resultado obtenido en los demás criterios de ajustes utilizados. El modelo será útil para investigadores y técnicos en los análisis de datos de árboles con crecimiento en condiciones diferentes; además, es la primera ecuación de esta forma que se desarrolla para esta especie.

Palabras claves: *Abies religiosa*, bondad de ajustes, compatible volumen-ahusamiento, entidades federativas

ABSTRACT

Despite the fact that there is a portfolio with a series of equations on different biometric systems, it is necessary to reinforce the information supported regarding the timber volume. The goal of the present study is to generate a compatible model that allows to accurately estimate the volume-taper of *Abies religiosa* in different states of Mexico. 2,608 data were used to describe the stem profile of the trees; in which a nonparametric quadratic local adjustment was performed using the local regression LOESS with a smoothed parameter of 0.3, to have greater certainty about the distribution of the data. Subsequently, a simultaneous adjustment was made using the apparently unrelated procedure (SUR) in the SAS software to estimate the volume at different heights depending on the diameter. Finally, heteroscedasticity correction was made to avoid any anomaly during the adjustment process.

The goodness of fit of the equations indicates that they are reliable for each UMAFOR, since the model explains more than 97% (R^2_{adj}) in both dependent variables, as well as the good result obtained in the other fit criteria used. The model will be useful for researchers and technicians in data analysis of trees growing under different conditions; In addition, it is the first equation of this form that is developed for this species.

Keywords: *Abies religiosa*, goodness of fit, compatible volume-taper, federal entities

2. INTRODUCCIÓN

Las distintas actividades silvícolas sobre el manejo del bosque permiten mejorar las condiciones de crecimiento y desarrollo de la masa, lo cual garantiza una ganancia significativa para el silvicultor al obtener una mayor existencia

volumétrica en el momento oportuno de su aprovechamiento (Valencia-Manzo *et al.*, 2017). Los modelos matemáticos son herramientas que brindan indicios basados en una ecuación que incluye variables estimadas, facilitando su análisis e interpretación (Diéguez-Aranda *et al.*, 2009; Guzmán-Santiago, Aguirre-Calderón y Vargas-Larreta, 2020).

Las funciones de ahusamiento-volumen permiten realizar estimaciones del fuste total y comercial del árbol; lo cual facilita hacer la clasificación de la madera de acuerdo con las necesidades (Kozak, 1988). Donde el ahusamiento se define como la disminución del diámetro en función al aumento de la altura comercial o total del árbol (Lee, Seo, Son, Lee, & Gadow, 2003; Hjelm, 2013; López-Martínez, Cruz-Cobos, Nájera-Luna, & Hernández, 2015). Estos modelos van de los más simples a lo más complejos, que se basan en árboles individuales, segmentados y exponente variable (Burkhardt y Tomé, 2012).

Su importancia radica en la cubicación del volumen del fuste a cualquier diámetro deseado mediante la integración del modelo (Milena-López, Barrios, y Trincado, 2015); lo cual se considera la forma más flexible y precisa de obtener el volumen comercial de un árbol en pie (Clutter, Fortson, Pienaar, Brister, & Bailey, 1983; Cruz-Cobos, Santos-Posadas y Valdez-Lazalde, 2008).

Este sistema consiste en describir las distintas partes del árbol; ya que la forma del fuste de cada especie varía en toda su longitud, pasando de un neiloide en la base, a formas cilíndricas o paraboloides truncados (en la zona de mayor aprovechamiento comercial), terminando en forma cónica o de paraboloide en la punta del árbol (Tamarit-Urias *et al.*, 2014). Independientemente de la especie, la variación del fuste está determinada por las condiciones de la calidad del sitio y por los tratamientos silviculturales aplicados (Uranga-Valencia, Santos-Posadas, Valdez-Lazalde, López-Upton y Navarro-Garza, 2015).

Su uso facilita analizar e interpretar la información derivada de inventarios forestales ya que son flexibles y no presentan cruces ilógicos en las estimaciones de volúmenes en diámetros de utilización (López-Martínez *et al.*, 2019). Demaerschalk (1972) y Cruz-Cobos *et al.* (2008) mencionan que es posible tener un modelo compatible volumen-ahusamiento cuando están definidos por los

mismos parámetros y tengan una estructura geométrica común; además, por tratarse de ecuaciones de tipo no lineal (logístico, exponencial, entre otras), son ideales para describir sistemas físicos y biológicos de las especies (Da Cunha y Guimarães-Finger, 2009; Urbano, Machado, Figueiredo-Filho, Sanquetta y Zea-Camaño, 2018).

Durante décadas, diferentes entidades federativas de México han utilizado ecuaciones no apropiadas para cada especie (Cruz-Cobos, Mendía-Santana, Jiménez-Flores, Nájera-Luna y Cruz-García, 2016); por lo que regularmente no genera confianza en las estimaciones deseadas (De Azevêdo, Paes, Calegari y Do Nascimento, 2014). Lo anterior, dio pauta para que varios investigadores e instituciones mostraran interés en generar ecuaciones propias para algunas especies de interés comercial para apoyar a los manejadores del bosque y a su vez obtener información verídica sobre los rendimientos maderables, misma que permite tomar decisiones en el manejo (Vargas-Larreta *et al.*, 2017); sin embargo, es importante destacar que aún se sigue trabajando para mejorar la información generada, con la finalidad de reforzar los resultados reportados en la plataforma digital denominada Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor, 2016); razón por la cual se realizó esta investigación. El objetivo fue proponer un modelo compatible que permita estimar el volumen-ahusamiento de *Abies religiosa* en distintas unidades de manejo forestal de México.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Área de estudio

El estudio se desarrolló en ocho entidades federativas, y integradas por 20 Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR), que son: Guerrero (1203), Hidalgo (1303), Jalisco (1404, 1406, 1410), Estado de México (1503, 1507, 1508, 1510) Michoacán (1604, 1605, 1607, 1608), Puebla (2101, 2105, 2108), Tlaxcala (2901, 2902) y Veracruz (3004, 3012) (INEGI, 2016).

3.2 Tamaño de muestra

Se utilizó una muestra dasométrica de 2, 608 árboles a partir de un muestreo aleatorio por UMAFOR en zonas de aprovechamiento forestal y en áreas sin autorización de programa de manejo. En el primer caso se utilizó el muestreo destructivo que consistió en derribar, seccionar y medir cada troza considerando las diferentes categorías diamétricas. En las áreas no autorizadas, las mediciones se hicieron de manera escalonada con una forcípula laser para medir el diámetro a distintas alturas. En cada sitio el diámetro normal fue medido en pie con cinta diamétrica; mientras que para la medición de las alturas se utilizó un hipsómetro. Los árboles derribados se midieron usando el flexómetro.

Para cada árbol se registraron las siguientes variables: diámetro normal medido a 1.3 m sobre el nivel del suelo (D_n , cm), altura total (H_t , m), diámetros con corteza a diferentes alturas (d_i , cm) y la longitud del fuste con respecto al suelo (h_i , m). Las primeras mediciones se realizaron en dos secciones de 0.30 m por encima del tocón, posterior a eso, la siguiente sección fue en el diámetro normal (1.30 m), y después las secciones fueron cortadas de manera constante a 2.54 m de longitud hasta llegar a la punta del árbol. Las distintas secciones que tienden la forma de un cilindro y paraboloide fueron cubricadas por la fórmula de Smalian (1), mientras que la última sección (punta del árbol) se utilizó la del cono (2) (Vargas-Larreta *et al.*, 2017).

$$V_s = \left[\frac{S_0 + S_1}{2} \right] * L \quad 1$$

$$V_p = \frac{S_o H_o}{3} \quad 2$$

donde: V_s = Volumen por Smalian, S_0 y S_1 = Áreas de las secciones transversales de la troza, L = longitud de la troza, V_p = Volumen de la última sección del árbol (punta del árbol), S_o = Área de la base de la última sección del árbol, H_o = longitud de la última sección del árbol.

Para realizar el ajuste del modelo compatible fue necesario obtener una referencia descriptiva de las variables: diámetro normal (Dn, cm), Altura total (At, m) y Volumen (vol, m³) (Cuadro 1).

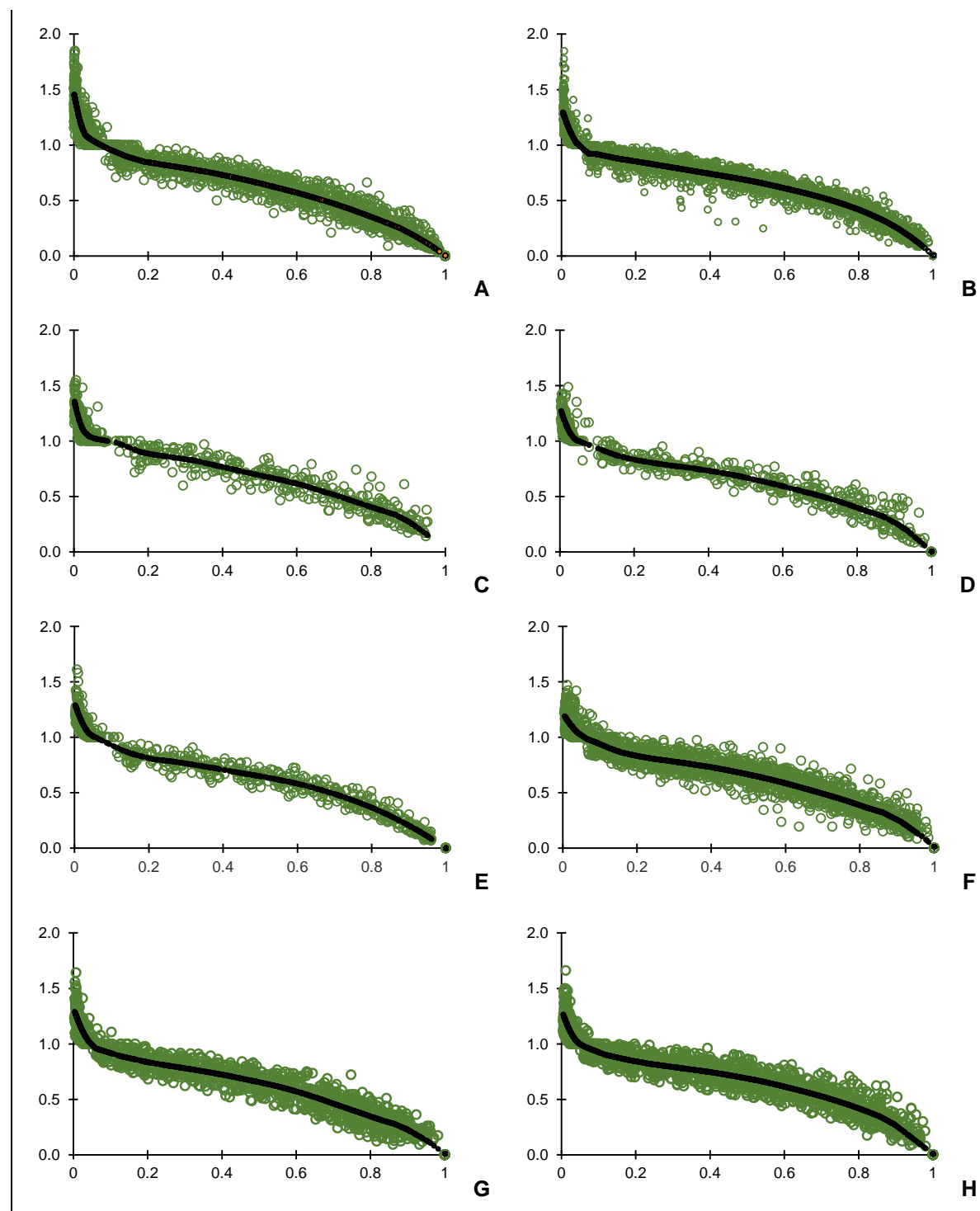
Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de las variables analizadas

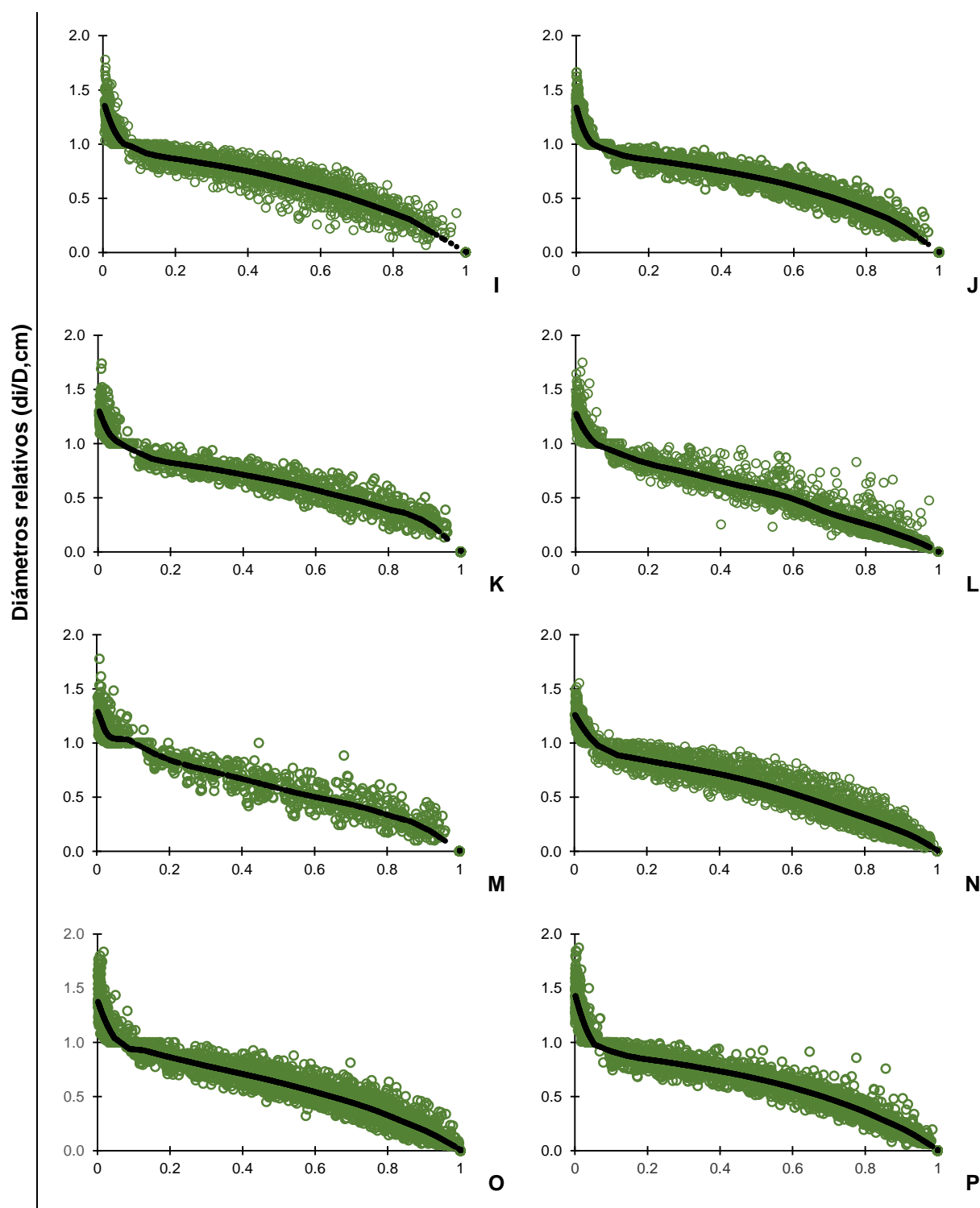
Entidades federativas	No. Árboles	UMAFOR	Mínimo	Promedio	Máximo	Desviación estándar
Diámetro normal (Dn, cm)						
Guerrero	162	1203	8.15	27.71	70.00	14.5
Hidalgo	180	1303	8.60	37.35	64.00	11.27
Jalisco	52	1404	8.50	36.73	70.00	16.17
	49	1406	9.00	44.75	70.00	13.55
	52	1410	9.70	41.01	79.00	16.6
Ciudad de México	133	1503	8.75	44.95	85.5	22.71
	84	1507	8.00	49.15	90.25	22.38
	151	1508	8.95	45.94	86.5	20.32
	135	1510	7.75	34.32	79.5	19.06
Michoacán	142	1604	13.00	40.91	72.5	12.95
	108	1605	9.00	38.31	74.5	13.69
	148	1607	7.75	31.52	91.65	16.13
	133	1608	7.75	42.7	88.15	19.05
Puebla	148	2101	7.95	42.61	94.5	22.35
	175	2105	5.40	40.58	94.00	21.07
	156	2108	9.05	41.81	83.2	19.04
Tlaxcala	205	2901	8.50	28.10	62.3	13.91
	97	2902	7.60	30.44	79.00	15.03
Veracruz	150	3004	8.20	29.55	52.00	9.67
	148	3012	12.20	33.48	97.00	13.19
Altura (At, m)						
Guerrero	162	1203	7.62	21.56	44.80	7.97
Hidalgo	180	1303	9.50	31.83	43.30	6.68
Jalisco	52	1404	7.26	23.45	39.06	8.92
	49	1406	9.70	28.65	36.72	5.00
	52	1410	10.88	26.06	37.59	6.56
Ciudad de México	133	1503	7.20	28.72	52.46	11.11
	84	1507	7.81	30.55	50.50	10.19
	151	1508	10.8	27.86	44.55	9.11
	135	1510	10.51	21.13	50	6.14
Michoacán	142	1604	13.83	28.27	46.27	6.43
	108	1605	9.80	24.16	39.55	5.60
	148	1607	10.12	26.54	41.3	7.84
	133	1608	6.6	26.68	45.4	9.68
Puebla	148	2101	7.33	26.47	50.17	9.35
	175	2105	6.10	26.37	41.30	8.75
	156	2108	9.87	26.98	40.56	7.86
Tlaxcala	205	2901	5.13	17.89	40.57	9.13
	97	2902	6.27	21.03	37.25	8.03

Veracruz	150	3004	7.30	16.50	25.40	3.60
	148	3012	8.25	18.30	32.92	4.83
Volumen (Vol, m³)						
Guerrero	162	1203	0.02	0.96	6.34	1.16
Hidalgo	180	1303	0.03	1.88	5.73	1.17
Jalisco	52	1404	0.02	1.74	6.00	1.68
	49	1406	0.03	2.42	5.72	1.37
	52	1410	0.04	1.94	5.94	1.54
Ciudad de México	133	1503	0.03	3.2	11.43	3.09
	84	1507	0.02	3.52	11.31	2.93
	151	1508	0.04	2.95	11.03	2.50
	135	1510	0.02	1.39	7.19	1.67
Michoacán	142	1604	0.08	2.12	8.79	1.49
	108	1605	0.04	1.62	7.30	1.37
	148	1607	0.04	1.28	9.09	1.53
	133	1608	0.02	2.34	13.52	2.36
Puebla	148	2101	0.03	2.48	10.66	2.76
	175	2105	0.01	2.33	12.25	2.41
	156	2108	0.03	2.40	9.34	2.17
Tlaxcala	205	2901	0.02	0.98	5.14	1.19
	97	2902	0.03	1.22	5.56	1.32
Veracruz	150	3004	0.02	0.65	1.97	0.44
	148	3012	0.05	0.98	10.87	1.22

3.3 Descripción del perfil fustal

Se describió el perfil de los árboles, con base al gráfico de dispersión entre el diámetro relativo (d_i/D , cm) y la altura relativa (h_i/H , m) para detectar datos aberrantes. Para tener una mayor certeza se realizó el ajuste local cuadrático no paramétrico utilizando la regresión local LOESS o LOWESS (Cleveland, 1979) del paquete estadístico SAS con un parámetro suavizado de 0.3. Posteriormente, los residuos se dividieron en diez intervalos de altura relativa para verificar la distribución de los datos (Bi, 2000; Bi & Long, 2001; López-Martínez *et al.*, 2019) de las ocho entidades federativas; lo cual permitió obtener buenos ajustes.





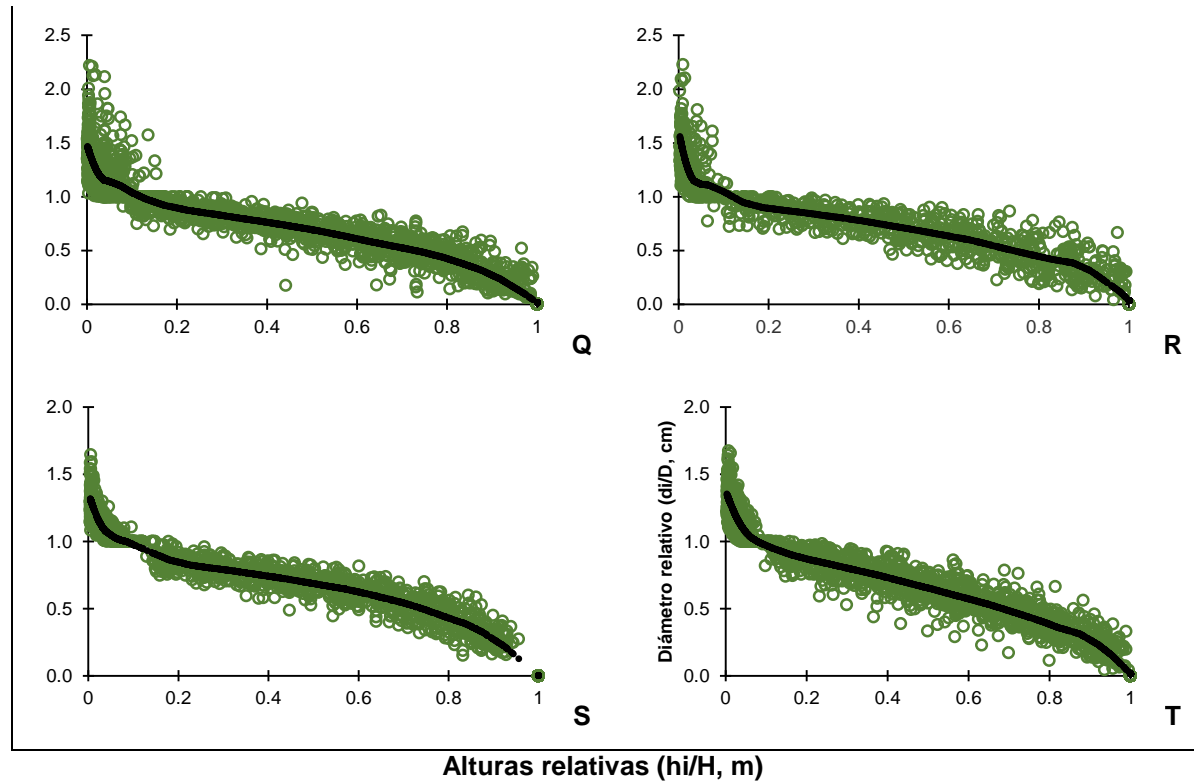


Figura 1. Diámetro relativo con altura relativa de las UMAFORES: **A=** 1203, **B=** 1303, **C=** 1404, **D=** 1406, **E=** 1410, **F=** 1503, **G=** 1507, **H=** 1508, **I=**1510, **J=** 1604, **K=** 1605, **L=** 1607, **M=** 1608, **N=** 2101, **O=** 2105, **P=** 2108, **Q=** 2901, **R=** 2902, **S=** 3004, **T=** 3012.

3.4 Ajustes del modelo

Se ajustó el modelo de Fang, Borders y Bailey (2000) que es tipo no lineal para estimar el volumen comercial (3) en base a la descripción del perfil del árbol (4) por UMAFOR. Esta función cumple la condición de que $h=H$ cuando $d=0$; ya que es un modelo polinomial segmentado compuesto de ecuaciones injertadas; con el propósito de describir de manera correcta los diferentes puntos de unión del fuste de los árboles, mismas que se muestra a continuación.

$$\square \quad r_0 = (1 - h_b/H)^{\frac{k}{b_1}} \quad \square \quad r_1 = (1 - p_1)^{\frac{k}{b_1}} \quad \square \quad r_2 = (1 - p_2)^{\frac{k}{b_2}}$$

$$Vc = c_1^2 H^{\frac{k}{b_1}} \left[b_1 r_0 + (l_1 + l_2) + (b_1 - b_2) r_1 + l_2 \right. \\ \left. (b_3 - b_2) \alpha_1 r_2 - b(1-q)^{\frac{k}{b}} \alpha_1^{l_1 + l_2} + \alpha_1^{l_2} \right]$$

$$d_l = c_1 \sqrt{H^{\frac{k-b_1}{b_1}} (1-q)^{\frac{k-b}{b}} \alpha_1^{l_1 + l_2} \alpha_2^{l_2}}$$

$$\text{donde} \begin{cases} l_1 = 1 & \text{si} \\ l_2 = 2 & \text{si} \end{cases} \begin{cases} \text{de lo contrario } 0 \\ \text{de lo contrario } 0 \end{cases}$$

4

$$b = b_1^{1-(l_1+l_2)} b_2^{l_1} b_3^{l_2} \quad \alpha_1 = (1-p_1)^{\frac{(b-p_1)k}{b_1 b_2}}$$

$$\alpha_2 = (1-p_2)^{\frac{(b-p_2)k}{b_2 - b_3}}$$

donde: D= diámetro normal (cm), d= diámetro (cm) a la altura h (m) desde el nivel del tocón, H= altura total de los arboles (m), h_b= altura del tocón (m), Vc = volumen comercial (m³), k = π/40000, q= h_i-h, α, b, p= parámetros a ser estimados.

3.5 Método y estadísticos de bonda de ajustes

Par la estimación de los parámetros se utilizó el procedimiento MODEL del paquete MODEL de SAS (Statistical Analysis System, 2008). Donde el ajuste se realizó en forma simultánea, con el método de regresión aparentemente no relacionada o Seemingly unrelated regressions (RAC o SUR), con la finalidad de minimizar errores de los parámetros (Cruz-Cobos *et al.*, 2008). Para evitar la convergencia de los parámetros a un óptimo local, se usaron los valores obtenidos por Vargas-Larreta *et al.* (2017).

La eficiencia del modelo para cada UMAFOR fue medida mediante los criterios estadísticos, que a continuación se muestran: coeficiente de determinación ajustado (R²_{adj}); en el cual es deseable que los valores obtenidos sean cercanos a 1; mientras que, la Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) debe aproximarse a cero. Así mismo el sesgo (\bar{e}) busca que el promedio de los residuales sea igual a cero para que el estimador sea centrado o insesgado (Amat-Rodrigo, 2016) y

el Criterio de Información Akaike (CIA) que tiende tomar el menor valor (Del Carmen-García, Castellana, Rapelli, Koegel, & Catalano, 2014)

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left[\frac{n-1}{n-p-1} \right] \quad 5$$

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}} \quad 6$$

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \bar{Y}_i)}{n} \quad 7$$

$$CIA = n * \ln(SCR) + 2(p + 1) - n * \ln(n) \quad 8$$

donde: SCR= Suma de Cuadrado del Error, p= número de parámetros a estimar, n= es el tamaño de muestra, ln= logaritmo natural, Y_i = valores observados, \hat{Y}_i = valores predichos, \bar{Y}_i = valores promedio, p= número de parámetros a estimar, n= número de observaciones.

Lo anterior, se complementó con el análisis gráfico de los residuos frente a los valores predichos del volumen, ya que es una forma eficiente de evaluar la capacidad de ajuste de un modelo, al permitir detectar posibles tendencias sistemáticas de los datos (Diéguez-Aranda, Barrio-Anta, Castedo-Dorado y Álvarez-González, 2005; Guzmán-Santiago *et al.*, 2019).

3.6 Corrección de heterocedasticidad

Dado que, en este tipo de estudio es muy frecuente la presencia de heterocedasticidad, se procedió a corregir aplicando una ponderación con los mismos pesos a la inversa de la varianza de cada observación para garantizar las estimaciones de los parámetros. La varianza desconocida se estimó con la función potencial $\sigma_i^2 = \gamma \times x^k$. Los valores de γ y del exponente k se optimizaron empleando los errores del modelo ajustado sin pesos como variable dependiente en el modelo potencial de varianza del error (Harvey, 1976). Finalmente, el peso considerado fue $1/D^2 * H$ para la ecuación de volumen rollo total árbol.

4. RESULTADOS

4.1 Comparación entre UMAFORES

En el cuadro 2 se presentan los valores de los estimadores de parámetros de cada una de las UMAFORES reportadas mediante estimaciones en forma simultánea; que como respuesta son más eficientes y que a su vez los errores son minimizados. Así mismo la bondad de ajuste generada con los sistemas de ecuaciones resultó altamente significativa ($p < 0.0001$), lo cual evidencia que las variables independientes explican más del 97% del volumen y la descripción del perfil fustal. Así mismo, se observa que en ambas variables estimadas se obtuvieron excelentes bondades de ajustes con respecto a los sesgos y la raíz del error medio cuadrático. De esta forma, se sustenta que el sistema de Fang *et al.* (2000) es apropiado para estimar el volumen y ahusamiento de cada uno de los árboles de cualquier diámetro y altura deseada.

Cuadro 2. Estimadores de los parámetros y bondad de ajuste

UMAFOR	Estimador de parámetro	Estimación	Error estándar	Valor t	Aprox Pr> t	Vc				Dc			
						CIA	Sesgo (m ³)	REMC (m)	R ² _{adj}	CIA	Sesgo (m)	REMC (m)	R ² _{adj}
1203	<i>a</i> ₀	0.00005400	0.00000192	28.31	<.0001	1727.75	0.00002	0.11	0.99	22921.03	-0.1221	2.54	0.98
	<i>a</i> ₁	1.68658000	0.01167550	144.45	<.0001								
	<i>a</i> ₂	1.20751600	0.01537038	78.56	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000400	0.00000009	45.87	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00003600	0.00000038	95.97	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00003200	0.00000067	48.73	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.04508000	0.00101022	44.62	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.65388700	0.04404292	14.85	<.0001								
1303	<i>a</i> ₀	0.00002000	0.00000107	19.00	<.0001	1142.54	0.00075	0.16	0.98	37165.26	-0.0675	2.16	0.98
	<i>a</i> ₁	1.60277600	0.00956422	167.58	<.0001								
	<i>a</i> ₂	1.57936800	0.01795778	87.95	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000400	0.00000007	57.83	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00004000	0.00000023	174.03	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00003200	0.00000049	66.01	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.04460000	0.00067803	65.78	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.74983300	0.01254858	59.75	<.0001								
1404	<i>a</i> ₀	0.00012300	0.00000900	13.68	<.0001	5946.73	0.00445	0.19	0.98	63239.54	-0.2854	2.29	0.98
	<i>a</i> ₁	1.85747900	0.02905067	63.94	<.0001								
	<i>a</i> ₂	0.80094600	0.03496563	22.91	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000500	0.00000021	25.89	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00003700	0.00000040	92.25	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00004200	0.00000459	9.05	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.04853800	0.00185216	26.21	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.90203300	0.03663402	24.62	<.0001								
1406	<i>a</i> ₀	0.00008600	0.00000825	10.44	<.0001	3874.53	-0.00005	0.14	0.99	11751.91	-0.1928	2.61	0.98
	<i>a</i> ₁	1.84495000	0.01686188	109.42	<.0001								
	<i>a</i> ₂	0.91292000	0.02891174	31.58	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000700	0.00000029	22.29	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00003800	0.00000106	35.94	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00003600	0.00000066	55.04	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.05878800	0.00259814	22.63	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.48185800	0.14166453	3.40	0.0007								

Continuación del cuadro 2													
1410	<i>a</i> ₀	0.00004100	0.00000368	11.18	<.0001	1587.44	0.00238	0.14	0.99	13509.51	-0.1942	2.15	0.99
	<i>a</i> ₁	1.70842500	0.01438439	118.77	<.0001								
	<i>a</i> ₂	1.26919100	0.03004534	42.24	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000700	0.00000028	67.10	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00003800	0.00000057	24.83	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00003100	0.00000069	44.51	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.06961900	0.00295815	23.53	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.66094700	0.02357689	28.03	<.0001								
1503	<i>a</i> ₀	0.00009300	0.00000401	23.30	<.0001	1650.92	0.00596	0.32	0.98	13804.78	-0.2071	2.35	0.99
	<i>a</i> ₁	1.73589800	0.01469059	118.16	<.0001								
	<i>a</i> ₂	1.01587900	0.01837714	55.28	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000600	0.00000016	35.08	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00003700	0.00000043	86.53	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00003900	0.00000039	100.29	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.04685500	0.00109790	42.68	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.52293800	0.06616724	7.90	<.0001								
1507	<i>a</i> ₀	0.00012200	0.00000810	15.09	<.0001	13550.7	-0.00067	0.39	0.98	47007.57	-0.2269	2.71	0.99
	<i>a</i> ₁	1.78133200	0.01679609	106.06	<.0001								
	<i>a</i> ₂	0.88231700	0.02494533	35.37	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000500	0.00000014	33.71	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00003400	0.00000025	136.48	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00004700	0.00000277	16.99	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.04462600	0.00108422	41.16	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.90835900	0.00997065	91.10	<.0001								
1508	<i>a</i> ₀	0.00011300	0.00000522	21.55	<.0001	8878.69	0.00795	0.29	0.98	30849.91	-0.0998	2.67	0.98
	<i>a</i> ₁	1.74578000	0.01214935	143.69	<.0001								
	<i>a</i> ₂	0.95499800	0.01686748	56.62	<.0001								
	<i>b</i> ₁	0.00000500	0.00000016	32.35	<.0001								
	<i>b</i> ₂	0.00001400	0.00000083	16.59	<.0001								
	<i>b</i> ₃	0.00003900	0.00000020	192.96	<.0001								
	<i>p</i> ₁	0.03566300	0.00101950	34.98	<.0001								
	<i>p</i> ₂	0.08356800	0.00332998	25.10	<.0001								
	<i>a</i> ₀	0.00012900	0.00000490	26.23	<.0001								
	<i>a</i> ₁	1.96004800	0.01262129	155.30	<.0001								
	<i>a</i> ₂	0.62920100	0.01498672	41.98	<.0001								

1510	Continuación del cuadro 2					11447.5	-0.00165	0.17	0.98	47086.86	-0.0908	2.55	0.98
	b_1	0.00000400	0.00000013	30.59	<.0001								
1604	b_2	0.00002000	0.00000099	19.69	<.0001								
	b_3	0.00003400	0.00000026	130.54	<.0001								
	p_1	0.03013600	0.00069690	43.24	<.0001								
	p_2	0.13700600	0.00851002	16.10	<.0001								
	a_0	0.00006900	0.00000291	23.64	<.0001								
	a_1	1.61509100	0.01152570	140.13	<.0001								
	a_2	1.24464000	0.01481613	84.01	<.0001								
	b_1	0.00000500	0.00000011	50.36	<.0001	10830.3	0.00017	0.18	0.98	40124.92	-0.1431	2.26	0.98
1605	b_2	0.00003900	0.00000039	98.83	<.0001								
	b_3	0.00003400	0.00000044	76.74	<.0001								
	p_1	0.05050500	0.00102015	49.51	<.0001								
	p_2	0.59689400	0.02402229	24.85	<.0001								
	a_0	0.00004700	0.00000314	14.97	<.0001								
	a_1	1.90290500	0.02054328	92.63	<.0001								
	a_2	1.02109000	0.02825924	36.13	<.0001								
	b_1	0.00000600	0.00000023	25.77	<.0001	4752.64	-0.001	0.24	0.96	39732.76	-0.1763	2.21	0.98
1607	b_2	0.00001700	0.00000144	11.49	<.0001								
	b_3	0.00003900	0.00000032	123.06	<.0001								
	p_1	0.03935700	0.00164531	23.92	<.0001								
	p_2	0.12058000	0.01028651	11.72	<.0001								
	a_0	0.00010200	0.00000520	19.53	<.0001								
	a_1	2.03071300	0.00593717	342.03	<.0001								
	a_2	0.61666000	0.01423654	43.32	<.0001								
	b_1	0.00000600	0.00000018	33.23	<.0001	2734.37	-0.00174	0.13	0.98	26804.75	-0.2656	2.19	0.98
1608	b_2	0.00002800	0.00000043	64.40	<.0001								
	b_3	0.00003300	0.00000045	74.07	<.0001								
	p_1	0.04637500	0.00138493	33.49	<.0001								
	p_2	0.45234100	0.02800635	16.15	<.0001								
	a_0	0.00003400	0.00000258	13.23	<.0001								
	a_1	1.80838800	0.02452088	73.35	<.0001								
1608	a_2	1.19402000	0.03258579	36.64	<.0001	3089.93	-0.00112	0.40	0.96	39872.46	-0.0909	3.14	0.98
	b_1	0.00000500	0.00000019	28.63	<.0001								
	b_2	0.00002900	0.00000041	70.31	<.0001								
	b_3	0.00003900	0.00000080	48.17	<.0001								

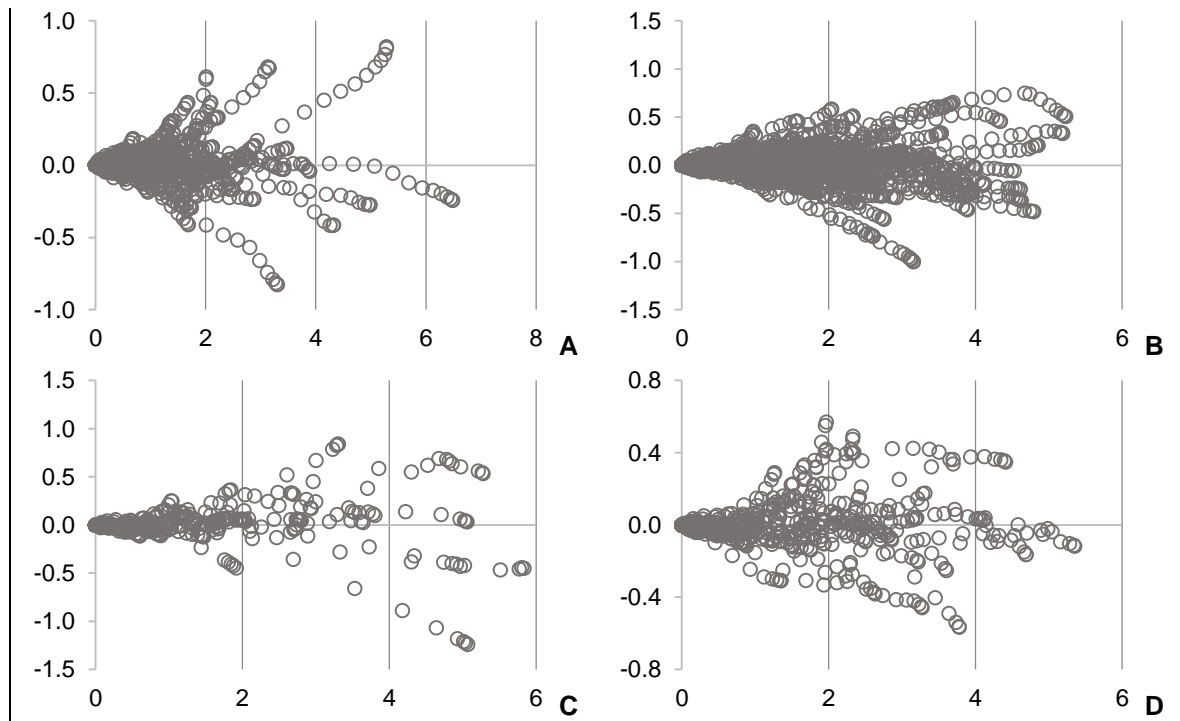
Continuación del cuadro 2												
	p_1	0.04074000	0.00122537	33.25	<.0001							
	p_2	0.57724100	0.01721642	33.35	<.0001							
2101	a_0	0.00007200	0.00000241	29.65	<.0001							
	a_1	1.87013300	0.01149334	162.71	<.0001							
	a_2	0.90991400	0.01455943	62.50	<.0001							
	b_1	0.00000600	0.00000011	53.87	<.0001	5479.19	0.0007	0.34	0.98	26213.63	-0.1169	2.04 0.99
	b_2	0.00003400	0.00000034	98.94	<.0001							
	b_3	0.00003100	0.00000030	101.25	<.0001							
	p_1	0.05809600	0.00101663	57.15	<.0001							
	p_2	0.53368900	0.02501355	21.34	<.0001							
2105	a_0	0.00003000	0.00000134	22.31	<.0001							
	a_1	1.85548600	0.00883926	209.91	<.0001							
	a_2	1.19034200	0.01709668	69.62	<.0001							
	b_1	0.00000300	0.00000006	39.62	<.0001	17363	-0.00085	0.22	0.99	60299.22	0.1103	2.75 0.98
	b_2	0.00000600	0.00000029	20.04	<.0001							
	b_3	0.00003100	0.00000014	219.39	<.0001							
	p_1	0.01796000	0.00049859	36.02	<.0001							
	p_2	0.04109200	0.00107773	38.13	<.0001							
2108	a_0	0.00004400	0.00000225	19.43	<.0001							
	a_1	1.47526300	0.01191746	123.79	<.0001							
	a_2	1.53566900	0.01999331	76.81	<.0001							
	b_1	0.00000300	0.00000006	61.79	<.0001	15044.4	0.00155	0.27	0.98	64513.14	-0.178	2.74 0.98
	b_2	0.00003700	0.00000026	138.91	<.0001							
	b_3	0.00003000	0.00000060	50.29	<.0001							
	p_1	0.04142100	0.00063699	65.03	<.0001							
	p_2	0.73978400	0.01484714	49.83	<.0001							
2901	a_0	0.00007700	0.00000293	26.44	<.0001							
	a_1	1.81754300	0.01291949	140.68	<.0001							
	a_2	0.99723000	0.01181764	84.38	<.0001							
	b_1	0.00000500	0.00000014	31.96	<.0001	11700.5	-0.00204	0.12	0.99	51259.77	-0.1576	2.52 0.98
	b_2	0.00001100	0.00000091	12.06	<.0001							
	b_3	0.00003900	0.00000024	163.12	<.0001							
	p_1	0.03128400	0.00130522	23.97	<.0001							
	p_2	0.07440800	0.00395228	18.83	<.0001							
	a_0	0.00010300	0.00000831	12.42	<.0001							

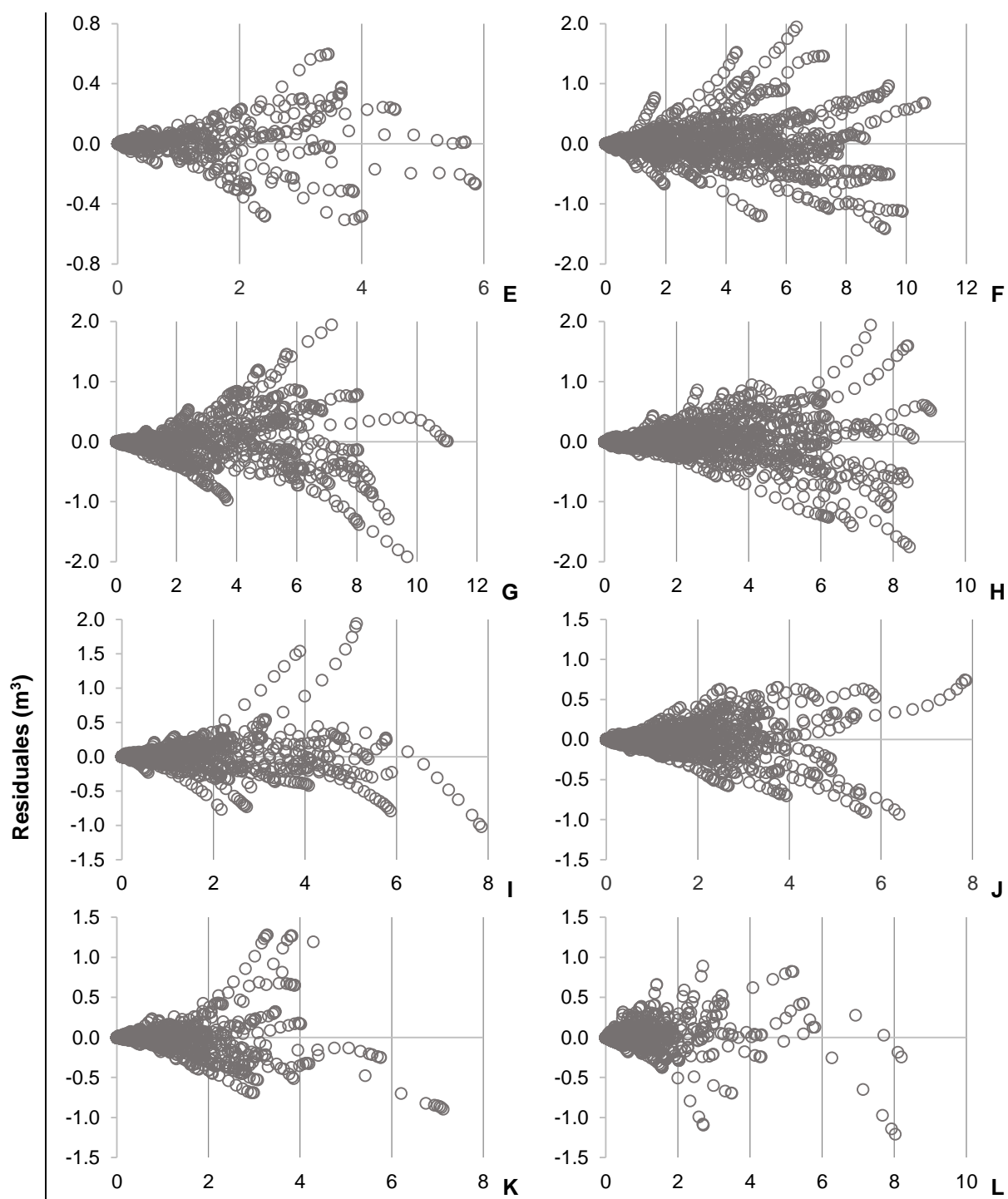
Continuación del cuadro 2													
2902	a_1	1.76736600	0.01789997	98.74	<.0001	18850.1	-0.00318	0.21	0.97	45063.94	-0.272	3.21	0.96
	a_2	0.96692200	0.02877671	33.60	<.0001								
	b_1	0.00000500	0.00000019	26.84	<.0001								
	b_2	0.00003700	0.00000048	76.72	<.0001								
	b_3	0.00005100	0.00000175	29.08	<.0001								
	p_1	0.05168800	0.00176829	29.23	<.0001								
	p_2	0.81093000	0.01865742	43.46	<.0001								
3004	a_0	0.00007300	0.00000418	17.56	<.0001	-6861.3	-0.00003	0.06	0.98	31806.86	-0.1325	2.10	0.97
	a_1	1.81715400	0.01418169	128.13	<.0001								
	a_2	0.99282300	0.02257374	43.98	<.0001								
	b_1	0.00000500	0.00000018	28.04	<.0001								
	b_2	0.00001800	0.00000101	17.79	<.0001								
	b_3	0.00003900	0.00000029	133.49	<.0001								
	p_1	0.02717200	0.00097607	27.84	<.0001								
p_2	0.14927800	0.00926216	16.12	<.0001									
3012	a_0	0.00004600	0.00000184	25.17	<.0001	1775.4	0.00025	0.12	0.99	36563.6	0.066	2.27	0.98
	a_1	1.97461100	0.01175288	168.01	<.0001								
	a_2	0.94387000	0.02102148	44.90	<.0001								
	b_1	0.00000700	0.00000019	36.13	<.0001								
	b_2	0.00003000	0.00000038	78.59	<.0001								
	b_3	0.00003900	0.00000053	72.93	<.0001								
	p_1	0.04946000	0.00130393	37.93	<.0001								
p_2	0.52357900	0.01678076	31.20	<.0001									

donde: V_c = Volumen comercial (m^3), D_c = Diámetro comercial o ahusamiento (m), CIA= Criterio de Información Akaike, REMC= Raíz del Error Medio Cuadrático (m^3), R^2_{adj} = Coeficiente de Determinación Ajustado.

4.2 Información volumétrica

Otro de los criterios que permitió corroborar la buena capacidad de predicción del modelo seleccionado son los análisis gráficos; lo que le da una mayor credibilidad (Figura 2). Cabe mencionar que se realizó la corrección de la heterocedasticidad, autocorrelación, y multicolinealidad; a pesar de que varios autores no lo consideran necesario, debido a que es un modelo de tipo segmentado y sobre todo, cuando se trabaja con datos de una sola especie en la estimación del volumen comercial; lo que se puede observar en cada una de la graficas el comportamiento que sigue el modelo del volumen acumulado respecto a los residuales. El rango del volumen fue entre 0.8 a 11.78 m³ aproximadamente; destacando que la UMAFOR 2101(**N**) fue la más baja volumétricamente y por ende con menores residuales, seguida por la 3004(**S**) con valores menores a 0.6 en los residuales. Las de mayor volumen fueron la, 2105(**O**) con 11.78 y la 1507(**G**) con 11.67 m³, respectivamente.





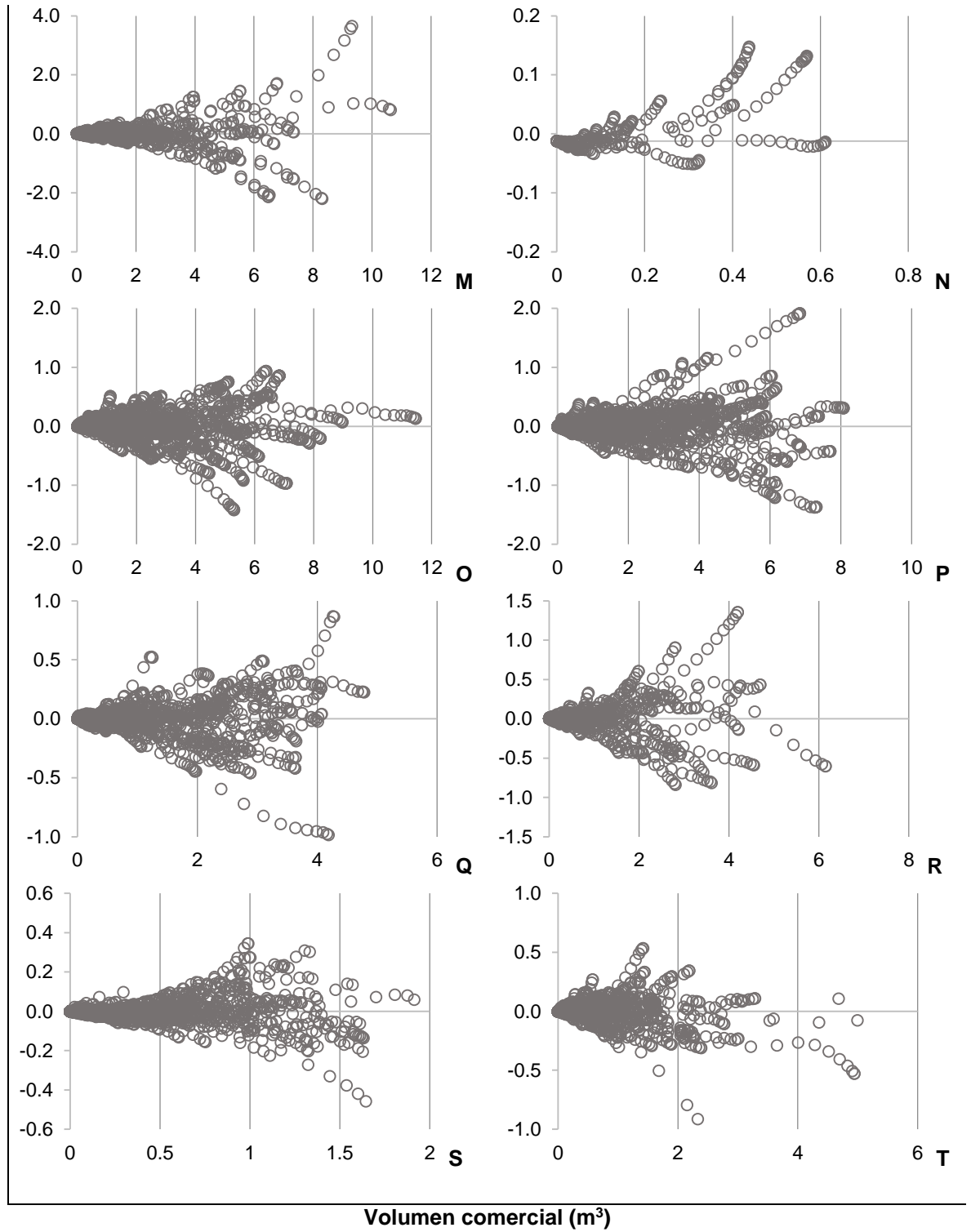
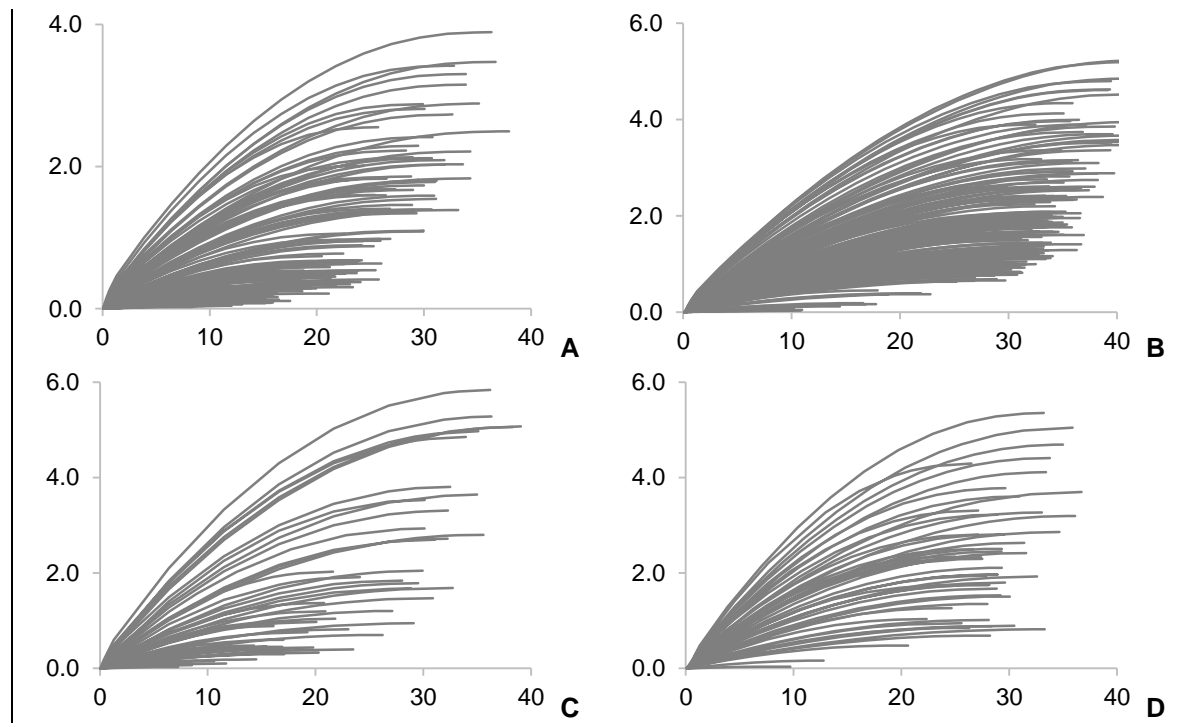
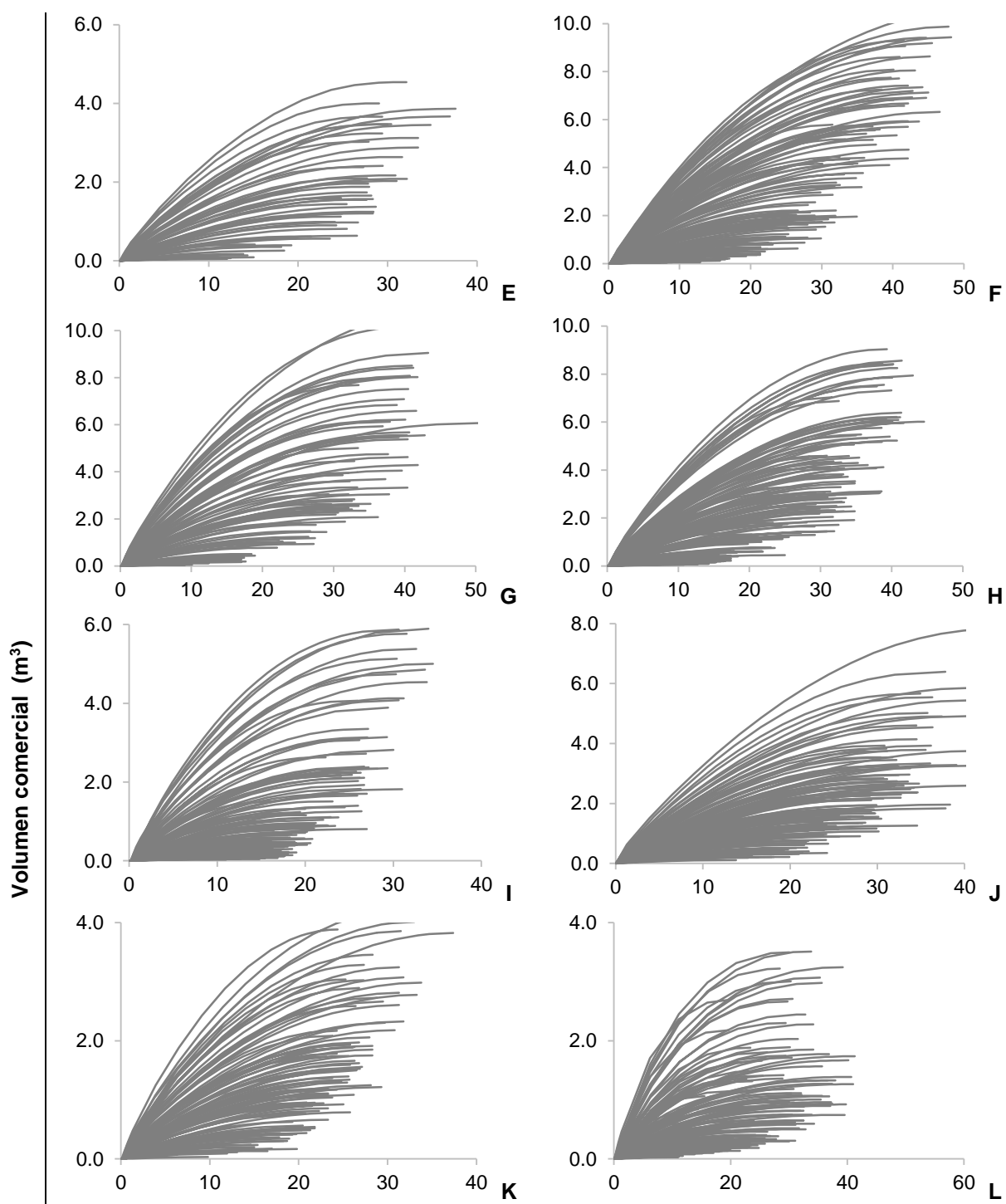


Figura 2. Volumen comercial vs residual: **A=** 1203, **B=** 1303, **C=** 1404, **D=** 1406, **E=** 1410, **F=** 1503, **G=** 1507, **H=** 1508, **I=** 1510, **J=** 1604, **K=** 1605, **L=** 1607, **M=** 1608, **N=** 2101, **O=** 2105, **P=** 2108, **Q=** 2901, **R=** 2902, **S=** 3004, **T=** 3012.

4.3 Volumen acumulado en distintas alturas

En las siguientes gráficas se muestra el comportamiento de las relaciones que existen entre las distintas alturas comerciales y el volumen de cada unidad de manejo. De manera resumida, se observa que en las UMAFORES 1503(**F**), 1507(**G**) y 1508(**H**) se encontraron algunos árboles con buenas características, al presentar un volumen mayor a 8 m³ y con una altura mayores a 30 metros respectivamente; mientras que las UMAFORES 3004(**S**) y 3012(**T**) mostraron los valores más bajos (Vol, Hm); sobre todo en el sitio **S** que presentó una altura de 24.3 metros y un volumen de 1.8 m³. Estos resultados se derivan de factores ambientales (diferencias químicas y físicas del suelo), del manejo silvícola, así como las características genéticas de las especies; lo que puede hacer variar los patrones de crecimiento entre los sitios.





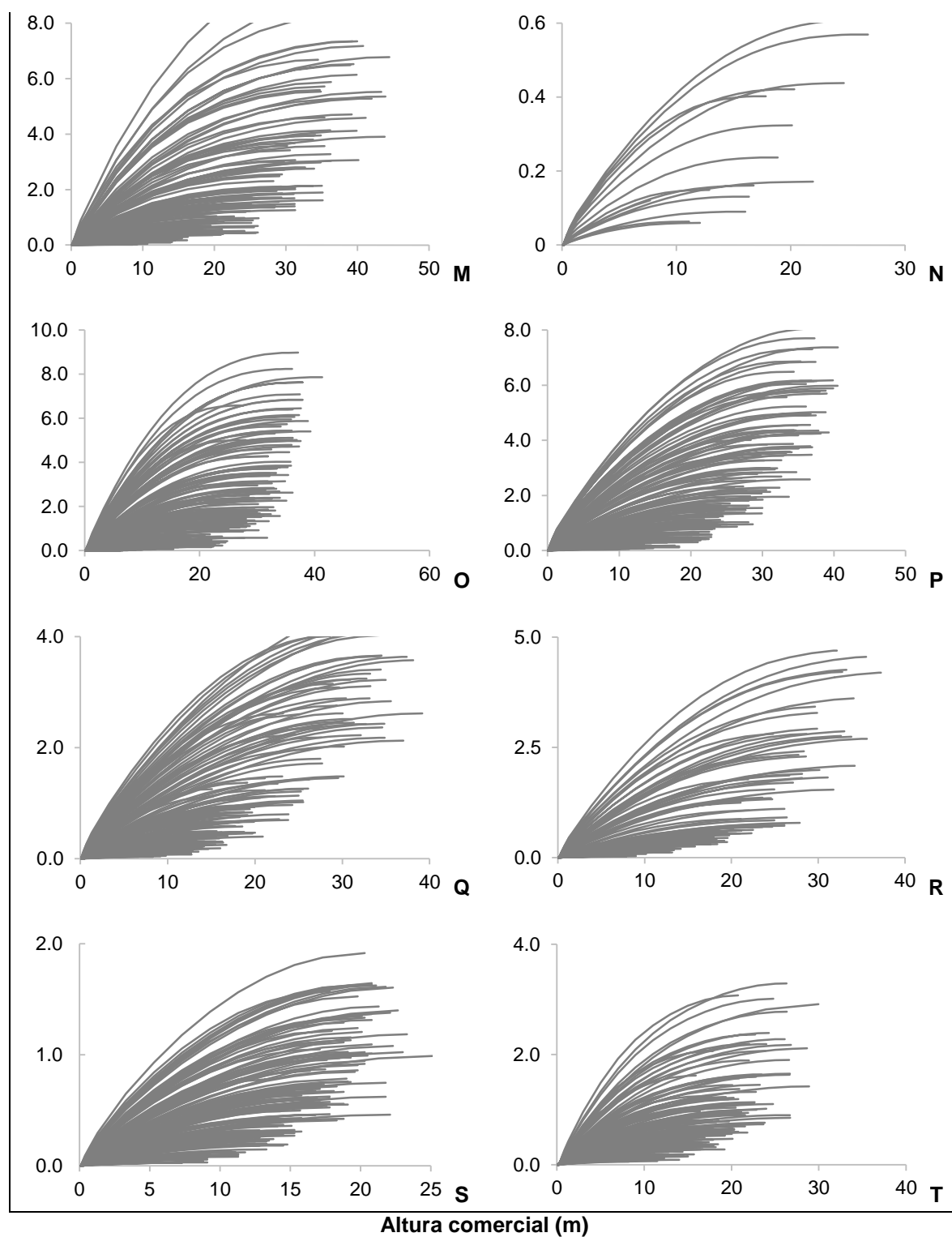


Figura 3. Volumen acumulado a distintas alturas: **A= 1203, B= 1303, C= 1404, D= 1406, E= 1410, F= 1503, G= 1507, H= 1508, I= 1510, J= 1604, K= 1605, L= 1607, M= 1608, N= 2101, O= 2105, P= 2108, Q= 2901, R= 2902, S= 3004, T= 3012.**

5. DISCUSIÓN

El sistema compatible desarrollado para la predicción del volumen y ahusamiento a diferentes alturas comerciales, donde los estadísticos fueron altamente significativos, puede emplearse como una herramienta para el manejo y la planificación de distintas actividades silvícolas, lo cual permite optimizar la utilización del fuste para su posterior industrialización (Uranga-Valencia, Santos-Posadas, Valdez-Lazalde, López-Upton y Navarro-Garza, 2015; Nino-López, Ramos-Molina, Barrios y López-Aguirre, 2018).

Este sistema compatible segmentado brinda buenos ajustes de manera consistente y precisa a diferencia de otros (Tang *et al.*, 2016), tal es el caso del modelo polinomial simple y el de exponente variable que presentan deficiencias en la descripción del área basal (López-Martínez *et al.*, 2015). El modelo de Fang *et al.* (2000) se caracteriza por tener una estructura capaz de modelar el fuste de especies de latifoliadas y coníferas (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014; Ozcelik y Gocer, 2015), así como en especies tropicales (López-Martínez *et al.*, 2019); ya que está basado en principios biológicos, lo que posibilita su incorporación a los sistemas biométricos para modelar el perfil fustal de manera adecuada (Corral-Rivas *et al.*, 2007).

La buena estimación se debe a que la mayoría de las veces se utiliza la validación cruzada que consiste en la sumatoria de los volúmenes de cada troza a través de la fórmula de Smalian; motivo por el cual, frecuentemente se obtienen predicciones mayores a 97% (Rodríguez-Toro *et al.*, 2016a; Rodríguez Toro *et al.*, 2016b). Como consecuencia varios autores afirman que las estimaciones dan confianza al obtener altos rendimientos (Gaillard, Pece y Ríos, 1997; Tlaxcala-Méndez, Santos-Posadas, Hernández-de la Rosa, López-Ayala, 2016; Hernández-Ramos *et al.*, 2018).

López-Martínez *et al.* (2019), realizaron estudios para 11 especies tropicales más importantes en el Sureste de México; en donde obtuvieron bondades de ajuste similares a los de este estudio, ya que el modelo explicó más del 94% sobre la variabilidad en ahusamiento y volumen comercial. Esta información, es respaldado por Özçelik y Göçeri (2015) en sus investigaciones sobre *Eucalyptus*

grandis y *E. camaldulensis* en la región de Turquía al explicar más del 97% en la predicción del volumen; esto es similar a lo reportado por Sakici, Misir, Yavuz y Misir (2008) en la misma región para *Abies*.

Esta misma estructura expresó una solidez estadística para volúmenes y diámetros en *Pinus patula* al conseguir una ganancia significativa del 97.06 y 98.09%, como producto de una silvicultura intensiva, que provoca que los árboles tengan fustes cilíndricos (Hernández-Pérez, Santos-Posadas, Ángeles-Pérez, Valdez-Lazalde y Volke-Haller, 2013). Además, las buenas estimaciones del modelo de Fang *et al.* (2000), sobre la especie *Pinus chiapensis* se puede constatar en los trabajos de Martínez-Ángel, Santos-Posadas, Fierros-González, Cruz-Cobos y Quiñonez-Barraza (2019).

El análisis de las distintas alturas de *Pinus cooperi* y *P. durangensis* en Durango, México; es posible apreciar las adecuadas estimaciones al explicar más del 97% sobre la variable dependiente, que prácticamente son aproximados a lo obtenido para *Abies religiosa* (Corral-Rivas, Diéguez-Aranda, Corral-Rivas, Castedo-Dorado, 2007; Quiñonez-Barraza, Santos-Posadas, Álvarez-González y Velázquez-Martínez, 2014; Corral-Rivas *et al.*, 2017).

También se ha observado en otros casos, por ejemplo, en el Noroeste de España evaluaron una plantación de *Pinus sylvestris*, donde encontraron un 61% de altura total (Diéguez-Aranda, U., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González y Rojo, 2006). Así mismo, Fang, Borders y Bailey (2000) obtuvieron 54% para *Pinus elliotii* y 57% en *P. taeda* en plantaciones de Estados Unidos. Así mismo, ha modelado sin problemas diámetros a distintas alturas *Gmelina arborea* en Colombia (Niño-López, Ramos-Molina, Barrios y López-Aguirre, 2018), para *Eucalyptus tereticornis* en Argentina (Milena-López, Barrios y Trincado, 2015), y *Eucalyptus nitens* en la región de la Araucanía (Chile) (Rodríguez-Toro *et al.*, 2016a).

Apesar de que en los datos no se observaron indicios de violación de algunos supuestos de regresión, se intentó hacer el análisis de corrección, sin embargo, no hubo ninguna mejora en las bondades de ajuste (Rojo, Perales, Sánchez, Álvarez y Gadow, 2005); lo cual se confirma con otras investigaciones que

señalan que en ocasiones, no es necesario hacer correcciones (colinealidad, heterocedasticidad y autocorrelación) para las predicciones de volumen comercial y ahusamiento en un modelo simultáneo, dado que es de tipo segmentado, y a veces se pierden ajustes (Zhang *et al.*, 2002); además en la práctica no varía de forma notable en cuanto a predicción se refiere (Diéguez-Aranda *et al.*, 2006; Ramírez-Martínez, Santiago-García, Quiñonez-Barraza, Ruiz-Aquino y Antúnez, 2018); la varianza no constante en las perturbaciones del modelo se debe a las variables biológicas, por lo que no invalida el ajuste (Prodan, Peters, Coxy y Real, 1997).

6. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos para cada UMAFOR mostraron excelentes estimaciones, dado que es un modelo segmentado con características biológicas; lo cual facilita describir el perfil fustal y volumen comercial de diferentes alturas en diferentes condiciones de crecimiento.

El modelo es compatible con una ecuación de volumen lo que facilita generar un sistema de ecuación para clasificar los tipos de productos para su comercialización.

Mediante esta técnica se puede observar la forma del fuste y así conocer los efectos de la longitud de la copa, densidad, calidad de sitio, entre otros sobre el ahusamiento.

Es el primer modelo con este tipo de estructura que se genera a nivel de UMAFOR en las ocho entidades federativas para *Abies religiosa* y será de utilidad en los inventarios forestales.

7. REFERENCIAS

- Amat-Rodrigo, J. (2016). Selección de predictores y mejor modelo lineal múltiple. RPubls. Madrid, España. 83 p.
- Bi, H., 2000. Trigonometric variable-form taper equations for *Eucalyptus Australian*. *Forest Science* 46(3): 397-409. DOI: <https://doi.org/10.1093/forestscience/46.3.397>

- Bi, H., Long Y., 2001. Flexible taper equation for site-specific management of *Pinus radiata* in New South Wales, Australia. *Forest Ecology Management* 148: 79-91. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(00\)00526-0](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(00)00526-0)
- Burkhart, H. y Tomé, M. (2012). *Modeling forest trees and stands*. Nueva York: Springer. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3170-9>
- Cleveland, W.S. (1979). Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots. *Journal of the American Statistical Association* 74(368): 829-836. DOI: <https://doi.org/10.1080/01621459.1979.10481038>
- Clutter, J.L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, G H., y Bailey, R. L. 1983. Timber management: a quantitative approach. Krieger Publishing Company, New York, USA.
- Corral-Rivas, J. J., Diéguez-Aranda, U., Corral-Rivas, S, y Castedo-Dorado, F. (2007). A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (Mexico). *Forest Ecology and Management* 238(1-3): 118-129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2006.09.074>
- Corral-Rivas, J. J., Vega-Nieva, D. J., Rodríguez-Soalleiro, R., López-Sánchez, C. A., Wehenkel, C., Vargas-Larreta, B., ... Ruiz-González, A. D. (2017). Compatible system for predicting total and merchantable stem volume over and under bark, branch volume and whole-tree volume of pine species. *Forests* 8(11): 417. DOI: <https://doi.org/10.3390/f8110417>
- Cruz-Cobos, F., los Santos-Posadas, D., Héctor, M., y Valdez-Lazalde, J. R. (2008). Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia* 42(4): 473-485. Disponible en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952008000400010&lng=es&nrm=iso. ISSN 2521-9766
- Cruz-Cobos, F., Mendía-Santana, R., Jiménez-Flores, J. Nájera-Luna, J. A. y Cruz-García, F. (2016). Ecuaciones de volumen para *Arbutus spp.* (madroño) en la región de Pueblo Nuevo, Durango. *Investigación y Ciencia*, 24(68), 41-47. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=67448742006>.

- Da Cunha, T. A. y Guimarães-Finger, C. A. (2009). Modelo de regresión para estimar el volumen total con corteza de árboles de *Pinus taeda* L. en el sur de Brasil. *Revista Forestal Mesoamericana Kurú*, 6(16), 1-15. Recuperado de: <http://revistas.tec.ac.cr/index.php/kuru/article/view/400>.
- De Azevêdo, T. K., Paes, J. B., Calegari, L., y Do Nascimento, J. W. (2014). Relações entre volume e massa da madeira e casca de jurema-preta (*Mimosa tenuiflora*). *Revista Brasileira de Ciências Agrárias*, 9(1): Obtenido de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=119030125017>.
- Del Carmen-García, M., Castellana, N., Rapelli, C., Koegel, L., & Catalano, M. (2014). Criterios de información y predictivos para la selección de un modelo lineal mixto. *SaberEs*, 6, 61–76. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5515546>.
- Demaerschalk, J. P. (1972). Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science*, 18(3), 241-245.
- Diéguez-Aranda, U., Barrio-Anta, M., Castedo-Dorado, F y Álvarez-González, J. (2005). Relación altura-diámetro generalizada para masas de *Pinus sylvestris* L. procedentes de repoblación en el noroeste de España. *Forest Systems*, 14(2), 229-241. Recuperado de: [http://www.inia.es/GCONTREC/PUB/229-241-\(154_04\)-Relacion_1162281472578.pdf](http://www.inia.es/GCONTREC/PUB/229-241-(154_04)-Relacion_1162281472578.pdf).
- Diéguez-Aranda, U., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., y Rojo, A. (2006). Compatible taper function for Scots pine plantations in northwestern Spain. *Canadian Journal of Forest Research*, 36(5), 1190-1205.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., ... Sánchez-Rodríguez, F. (2009). Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia. Galicia, España. Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural. 273 p. Recuperado de: www.usc.es/.../Herramientas_silvicolas_para_la_gestion_forestal_sostenible_en_galicia.

- Fang, Z., Borders, B. E., y Bailey, R. L. (2000). Compatible volume-taper models for loblolly and slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *Forest Science*, 46(1), 1-12.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., González- Tagle, M. A., Treviño-Garza, E. J., Jiménez-Pérez, J., Vargas-Larreta, B., ... De los Santos-Posada, H. M. (2019). Relación altura-diámetro para *Abies religiosa* Kunth Schltdl. & Cham. en el centro y sur de México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 10(52), 100–120. Doi: 10.29298/rmcf.v10i52.483.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., y Vargas-Larreta, B. (2020). Forest volume estimation techniques with special emphasis on the tropics. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 26(2), 0-0. Doi: 10.5154/r.rchscfa.2019.07.061.
- Harvey, A. C. (1976). Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 461-465.
- Hernández-Pérez, D., De los Santos-Posadas, H. M., Ángeles-Pérez, G., Valdez-Lazalde, J. R., y Volke-Haller, V. H. (2013). Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schltdl. et Cham. en Zacualtipán, Hidalgo. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 4(16), 34-45.
- Hernández-Ramos, J., Santos-Posadas, H. M., Valdéz-Lazalde, J. R., Tamarit-Urias, J. C., Ángeles-Pérez, G., Hernández-Ramos, A., ... Peduzzi, A. (2018). Funciones de ahusamiento para clones de *Eucalyptus urophylla* establecidos en plantaciones comerciales en Huimanguillo, Tabasco, México. *Agrociencia*, 52(7), 1013-1029.
- Hjelm, B. (2013). Stem taper equations for poplars growing on farmland in Sweden. *Journal of Forestry Research*, 24(1), 15-22. doi: 10.1007/s11676-012-0270-4.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2016). Compendio de información geográfica. Recuperado de www.internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/Productos/...2016/702825087357.pdf

- Kozak, A. (1988). A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*, 18(11), 1363-1368.
- Lee, W. K., Seo, J. H., Son, Y. M., Lee, K. H., y Von Gadow, K. (2003). Modeling stem profiles for *Pinus densiflora* in Korea. *Forest Ecology and Management*, 172(1), 69-77.
- López-Martínez, J. C., Cruz-Cobos, F., Nájera-Luna, J. A., Hernández, F. J. (2015). Modelos de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus oocarpa* y *Pinus douglasiana* en la región de Pueblo Nuevo, Durango. *Investigación y Ciencia de la Universidad Autónoma de Aguascalientes*, 64, 47-53.
- López-Martínez, J. O., Vargas-Larreta, B., Aguirre-Calderón, O. A., Aguirre-Calderón, C. G., Macario-Mendoza, P. A., Martínez-Salvador, M., ... Álvarez-González, J. G. (2019). Compatible taper-volume systems for major tropical species in Mexico. *Forestry: An International Journal of Forest Research*, 93(1), 56-74. Doi:10.1093/forestry/cpz033.
- Martínez-Ángel, L., De los Santos-Posadas, H. M., Fierros-González, A., Cruz-Cobos, F., y Quiñonez-Barraza, G. (2019). Funciones compatibles de ahusamiento y volumen en una plantación forestal comercial de *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen en Tlatlauquitepec, Puebla. *Agrociencia*, 53(3), 381-401.
- Milena-López, A. M., Barrios, y Trincado, G. (2015). Modelos de perfiles fustales con una estructura de error autorregresiva para plantaciones de *Eucalyptus tereticornis* en Colombia. *Madera y Bosques*, 21(2), 73-88.
- Niño-López, G. S., Ramos-Molina, P. A., Barrios, A., y López-Aguirre, A. M. (2018). Modelos compatibles de ahusamiento-volumen para árboles de *Gmelina arborea* Roxb. en el Alto Magdalena, Colombia. *Colombia Forestal*, 21(2), 174-187. doi: 10.14483/2256201X.12249.
- Özçelik, R. y Göçeri, M. F. (2015). Compatible merchantable stem volume and taper equations for *Eucalyptus* sp. plantations in the Eastern Mediterranean Region of Turkey. *Turkish Journal of Agriculture and Forestry*, 39(6), 851-863. DOI:10.3906/tar-1501-27.

- Prodan M., R. Peters, F. Cox, y P. Real. 1997. Mensura Forestal. Serie Investigación y Educación de Desarrollo Sostenible. Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA)/BMZ/GTZ sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible. San José, Costa Rica. 561 p.
- Quiñonez-Barraza, G.; De los Santos-Posadas, H.; Álvarez-González, J.; Velázquez-Martínez, A. (2014). Compatible taper and merchantable volume system for major pine species in Durango, Mexico. *Agrociencia*, 48, 553–567.
- Ramírez-Martínez, A., Santiago-García, W., Quiñonez-Barraza, G., Ruiz-Aquino, F., y Antúnez, P. (2018). Modelación del perfil fustal y volumen total para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Madera y Bosques*, 24(2), e2421496. Doi:10.21829/myb.2018.2421496.
- Rodríguez-Toro, A., Rubilar-Pons, R., Muñoz-Sáez, F., Cártes-Rodríguez, E., Acuña-Carmona, E., y Cancino-Cancino, J. (2016a). Modelo de ahusamiento para *Eucalyptus nitens*, en suelos de cenizas volcánicas de la región de La Araucanía (Chile). *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias*, 48(1), 101-114.
- Rodríguez-Toro, A., Rubilar-Pons, R., Muñoz-Saez, F., Cartes-Rodriguez, E., Acuna-Carmona, E., & Cancino-Cancino, J. (2016b). Taper model by type of soil for *Pinus radiata* in the regions of Biobio and the Araucania, Chile. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 22(2), 203-220. doi: 10.5154/r.rchscfa.2015.05.021.
- Rojo, A., Perales, X., Sanchez, F., Alvarez, J. G., y Gadow, K. (2005). Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). *European Journal of Forest Research*, 124(3), 177-186. Doi:10.1007/s10342-005-0066-6.
- Sakici, O. E., Misir, N., Yavuz, H., y Misir, M. (2008). Stem taper functions for *Abies nordmanniana* subsp. *bornmulleriana* in Turkey. *Scandinavian Journal of Forest Research*, 23(6), 522-533.
- SAS Institute Inc. (2008). SAS/STAT® 9.2 User's Guide Second Edition. Raleigh, NC, EE. UU.: SAS Institute Inc. s/p. Recuperado de:

<https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63033/HTML/default/viewer.htm>.

Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor). (2016). Biblioteca digital del sistema biométrico para la planeación del manejo forestal sustentable de los ecosistemas con potencial maderable en México. Recuperado de: <http://fcfposgrado.ujed.mx/sibifor/inicio/buscar.php>.

Tamarit-Urías, J. C., De los Santos-Posadas, H. M., Aldrete, A., Valdez-Lazalde, J. R., Ramírez Maldonado, H., y Guerra De la Cruz, V. (2014). Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* L. f. mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 5(21), 58-74.

Tang, X., Pérez-Cruzado, C., Torsten, V., Fehrmann, L., Álvarez-González, J.G. y Kleinn, C. (2016). Development of a compatible taper function and stand-level merchantable volume model for Chinese fir plantations. *Forestry*, 11(1), 1-15. DOI:10.1371/journal.pone.0147610.

Tlaxcala-Méndez, R.M., De los Santos-Posadas, H.M., Hernández-De la Rosa, P. y López-Ayala, J.L. (2016). Variación del factor de forma y el ahusamiento en procedencias de cedro rojo (*Cedrela odorata* L.). *Agrociencia*, 50(1), 89-15. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-31952016000100089&lng=es&tlng=es.

Uranga-Valencia, L. P., los Santos-Posadas, D., Héctor, M., Valdez-Lazalde, J. R., López-Upton, J., y Navarro-Garza, H. (2015). Volumen total y ahusamiento para *Pinus patula* Schiede ex Schltdl. et Cham. en tres condiciones de bosque. *Agrociencia*, 49(7), 787-801.

Urbano, E., Machado, S. D. A., Figueiredo-Filho, A., Sanquetta, C. R., y Zea-Camaño, J. D. (2018). Modelación del volumen de rodal para especies secundarias en bosques nativos de *Mimosa scabrella* en la región metropolitana de Curitiba, Paraná, Brasil. *Bosque*, 39(2), 227-237. DOI: 10.4067/S0717-92002018000200227.

- Valencia-Manzo, S., Trujillo-Gómez, S. A., Cornejo-Oviedo, E. H., Flores-López, C., Díaz-Balderas, J. A. y González-López, H. D. (2017). Ecuación de pressler para estimar volumen de fuste en árboles de *Pinus patula* Schl. et Cham. var. *longepedunculata* Look. *Foresta Veracruzana*, 19(1), 29-34. Recuperado de: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=49752128005>.
- Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J., Aguirre-Calderon, O. A., López-Martínez, J. O., De los Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., ... Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455. DOI:10.5154/r.rchscfa.2017.06.040.
- Zhang, Y., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2002. Derivation, fitting, and implication of a compatible stem taper-volumeweight system for intensively managed, fast growing loblolly pine. *For.Sci.* 48: 595-607.

CAPÍTULO V. ECUACIONES DE CALIDAD DE SITIO PARA *Abies religiosa* EN DISTINTAS REGIONES DE MÉXICO

SITE QUALITY EQUATIONS FOR *Abies religiosa* IN DIFFERENT REGIONS OF MEXICO

1. RESUMEN

Las estimaciones de altura dominante o índice de sitio posibilitan evaluar la productividad del rodal y funcionan como una herramienta dentro del plan del manejo forestal para fines de aprovechamiento. Este trabajo tuvo como objetivo analizar curvas dinámicas de índice de sitio con la metodología GADA en 12 UMAFORES para *Abies religiosa* en distintas regiones de México. Se utilizó 262 árboles de distintas UMAFORES que provienen de análisis troncales, con la finalidad de ajustarlo con el modelo de Richards mediante el Enfoque de Diferencia Algebraica Generalizada (GADA o EDAG) por mínimos cuadrados ordinarios. Con este enfoque pueden ser expandidas a las tasas de crecimiento y asíntotas, permitiendo que más de un parámetro del modelo dependa de la calidad de sitio, haciendo más flexibles las curvas polimórficas con múltiples asíntotas. Así mismo se corrigió la autocorrelación mediante la prueba estadística de Durbin Watson. En general para todas las UMAFORES se obtuvieron ganancias significativas cumpliendo con las características mencionadas, lo cual es deseable para modelar datos con tendencia de crecimiento sin afectar las predicciones de índice de sitio.

Palabras clave: *Abies religiosa*, altura dominante, asíntota, curvas polimórficas, Enfoque de Diferencias Algebraicas Generalizada, entidades federativas.

ABSTRACT

The estimates of dominant height or site index is capable of evaluating stand productivity and functions as a tool within the forest management plan for harvesting purposes. This work aimed to analyze dynamic site index curves with the GADA methodology in 12 UMAFORES for *Abies religiosa* in different entities of Mexico. The equation of 262 trees from different UMAFORES that come from trunk analyzes was used in order to fit it with the Richards model using the Generalized Algebraic Difference Approach (GADA) by ordinary least squares. With this approach they can be expanded to growth rates and asymptotes, allowing more than one parameter of the model to depend on site quality, making polymorphic curves with multiple asymptotes more flexible. Autocorrelation was also corrected using the Durbin Watson statistical test. In general, for all UMAFORES significant gains were obtained complying with the aforementioned characteristics, which is desirable to model growth trend data without affecting site index predictions.

Keywords: *Abies religiosa*, dominant height, asymptote, polymorphic curves, Generalized Algebraic Difference Approach, federal entities.

2. INTRODUCCIÓN

La amplia relación que existen entre diversos factores (económicos, ecológicos, culturales, entre otros) sobre el crecimiento y desarrollo de los bosques, suelen afectar de forma directa la productividad del sitio; misma que se puede explicar mediante la modelación matemática y estadística enfocada al sector forestal (Ahmadi & Alavi, 2016; Guzmán-Santiago, Aguirre-Calderón, & Vargas-Larreta, 2020; Quiñonez-Barraza, Zhao, Santos-Posadas, & Corral-Rivas, 2020), que brindan conocimiento sobre la producción y crecimiento de los árboles (Weiskittel, Hann, Kershaw, & Vanclay, 2011).

La calidad de estimación de la productividad es un referente en el manejo forestal para la toma de decisiones, para la selección de especies a cultivar para obtener

un alto rendimiento en la cosecha de la masa (Vargas-Larreta, Álvarez-González, Corral-Rivas, & Aguirre Calderón, 2010; Baluarte-Vásquez, & Álvarez-Gonzales, 2015; Sharma & Parton, 2018). Diéguez-Aranda *et al.* (2009) afirman que, en áreas de alta calidad de estación la mayoría de las especies producen alto volumen maderable. Este alto potencial de incremento indica que el patrón de crecimiento en altura de los árboles con buen grosor o clases sociológicas está poco afectado por la densidad del rodal y de las distintas labores silviculturales (Clutter, Fortson, Pienaar, Brister, & Bailey, 1983).

Los estudios de crecimiento en altura dominante en diversos rodales de México se remontan desde los años 80 (Vargas-Larreta *et al.*, 2017) y a pesar de que es uno de los temas más estudiados, aún sigue siendo de interés dado que existe una gran mezcla de especies creciendo en distintas condiciones de productividad (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015).

La productividad forestal se basa en el principio biológico, y puede representar la calidad de sitio mediante un valor (índice de sitio) cuantitativo (Attis Beltrán, Chauchard, & Martínez-Pastur, 2015; Hernández-Cuevas, Santiago-García, Santos-Posadas, Martínez-Antúnez, & Ruiz-Aquino, 2018), donde el suelo y el clima juegan un papel importante al estar directamente relacionados (Antón-Fernández, Mola-Yudego, Dalsgaard, & Astrup, 2016), a la vez estos factores ambientales están en constante cambio (Yue, Mäkinen, Klädtke, & Kohnle, 2014). El índice de sitio (IS) es el valor de la altura dominante a una edad de referencia (Castillo-López *et al.*, 2013; Mora, Meza, Porras, Sandí, & Aguilar, 2019), que puede incluir la altura promedio de árboles dominantes o codominantes a una edad apropiada para su comercialización (Sharma & Reid, 2018) y se utiliza para estimar la altura del rodal con la finalidad de evaluar la calidad y las condiciones del terreno.

El IS se estima de datos tomados en campo, que provienen de: parcelas permanentes de muestreo, parcelas de medición temporal y datos de análisis troncales. Diversos investigadores han utilizado información proveniente de parcelas temporales y de análisis troncales para el ajuste de ecuaciones de altura dominante (a-d), dado que reduce el tiempo y costo; sin embargo no descartan

como la mejor opción la de parcelas permanentes para modelar el efecto a-d (Allen & Burkhardt, 2015; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2020).

Las curvas del IS generadas con este tipo de enfoques deben de cumplir con algunas características o propiedades que son: polimorfismo, pauta de crecimiento sigmoide con un punto de inflexión, capacidad de alcanzar una asíntota horizontal a edades avanzadas, tener un sentido lógico (la altura dominante debe ser cero a la edad cero y la curva debe ser siempre creciente), ser invariantes con respecto al camino de simulación y con respecto a la edad de referencia (Bailey y Clutter, 1974).

Los métodos más utilizados en altura dominante e índice de sitio se basan en el enfoque de diferencias algebraicas (EDA o ADA) que involucra la sustitución de un parámetro del modelo base y expresarlo como una función del sitio (una combinación altura dominante-edad); sin embargo, su limitación se debe a que la mayoría de los modelos derivados son anamórficos o tienen una asíntota común (Cieszewski y Bailey, 2000); mientras que, la de diferencias algebraicas generalizada (EDAG o GADA) ofrece una ventaja a la ecuación base, ya que puede ser expandida de acuerdo con diversas teorías, como la tasa de crecimiento y asíntota, haciendo que más de un parámetro de cada modelo dependa de la calidad de estación, y a la vez sea más flexible (Cieszewski, 2001, 2002, 2003).

En México se distribuyen ampliamente una gran mezcla de especies con distintos estratos arbóreos (sobre todo incoetáneos), donde los estudios sobre productividad y crecimiento practican en su mayoría para bosques de pino y encino, ya que son comerciales (Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015). La especie en estudio también es considerada importante en el sector forestal en los diferentes enfoques: económico, ecológico, ambiental, social y sobre todo en la dinámica natural; lo cual dio justificación a este estudio (Guzmán-Santiago *et al.*, 2019). La investigación tuvo como objetivo analizar curvas dinámicas de índice de sitio con la metodología GADA en 12 UMAFORES para *Abies religiosa* de distintas regiones de México.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

3.1 Área de estudio

Se tomó información de 12 Unidades de Manejo Forestal (UMAFOR) en cinco entidades federativas, que son: Hidalgo (1303), Ciudad de México (1503, 1507, 1508, 1509, 1510), Michoacán (1604, 1605, 1607), Puebla (2105) y Tlaxcala (2901, 2902) (INEGI, 2016).

3.2 Tamaño de muestra

Se obtuvo información de análisis troncales de 262 árboles dominantes-codominantes, obtenidos de un muestreo destructivo que consistió en derribar, seccionar y medir los árboles. Para cada árbol se registraron las siguientes variables: diámetro normal medido a 1.3 m sobre el nivel del suelo (Dn, cm) con una cinta diamétrica y forcípula medido a 1.30 metro sobre el nivel del suelo; y la altura total (At, m) fue medida con un flexómetro. Las primeras mediciones se realizaron en dos secciones de 0.30 m por encima del tocón, posterior a eso, la siguiente sección fue en el diámetro normal (1.30 m), y después las secciones fueron cortadas de manera constante a 2.54 m de longitud hasta llegar a la punta del árbol. En el siguiente cuadro 1 se muestra la información relevante utilizada para los análisis respectivos.

Cuadro 1. Estadísticos descriptivos de las variables utilizadas

UMAFOR	No de árboles	Mínimo	Promedio	Máximo	Desviación estándar
Altura total (m)					
1303	26	14.50	32.95	42.10	5.97
1503	13	24.60	31.77	38.30	4.79
1507	14	20.32	32.68	40.61	5.79
1508	23	17.80	26.79	44.55	7.54
1509	20	22.30	34.47	42.00	5.85
1510	27	17.00	25.91	50.00	6.27
1604	29	23.20	32.71	43.00	4.25
1605	11	25.49	31.06	37.58	4.46
1607	29	10.75	25.44	36.00	7.63
2105	8	27.60	31.72	35.10	2.41

2901	36	13.40	24.00	39.20	6.79
2902	26	9.10	20.57	33.30	6.53
Diámetro normal (cm)					
1303	26	16.00	43.42	60.20	11.00
1503	13	41.00	55.00	75.00	9.92
1507	14	31.00	52.73	85.50	14.13
1508	23	29.00	49.48	79.00	13.24
1509	20	43.00	55.29	74.95	9.06
1510	27	27.00	50.56	83.00	16.76
1604	29	37.00	51.26	69.00	7.78
1605	11	44.00	53.36	61.00	5.16
1607	29	8.00	43.77	92.30	18.46
2105	8	30.80	47.57	68.70	13.00
2901	36	22.70	40.34	62.50	9.83
2902	26	18.20	33.46	86.50	17.06
Edad (años)					
1303	26	47.00	84.00	131.00	21.00
1503	13	34.00	50.00	88.00	16.00
1507	14	38.00	58.57	84.00	12.00
1508	23	26.00	58.26	126.00	28.00
1509	20	32.00	63.80	82.00	12.00
1510	27	30.00	59.96	85.00	16.00
1604	29	36.00	57.06	75.00	10.00
1605	11	36.00	56.72	96.00	20.00
1607	29	16.00	38.93	76.00	15.00
2105	8	54.00	75.62	115.00	21.00
2901	36	39.00	83.55	106.00	15.00
2902	26	25.00	52.00	114.00	23.00

3.3 Estimación de las alturas verdaderas

La sección del corte en la troza algunas veces no coincide con el comienzo de un año, dado que la altura de cada sección de corta suele ser sobreestimada; lo cual sesga los cálculos posteriores (Fabio, Frattegiani, & Manetti, 1994). Para solucionar este problema se utilizaron el algoritmo de Carmean (1972) y la fórmula modificada por Newberry (1991) para la troza final, que han sido empleadas por varios investigadores (Dyer & Bailey, 1987; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2015; Vargas-Larreta *et al.*, 2017).

Los supuestos del método son dos: 1) el árbol crece a un ritmo constante entre dos secciones, 2) el corte se realiza, como media en el centro del crecimiento en altura de un año. A continuación, se muestran las fórmulas empleadas para calcular la altura verdadera referente a cada parte del árbol.

$$\text{Tocón} \quad H_T = T \left(\frac{H_2}{N_1 - N_2 + 0.5} \right) \quad 1$$

$$\text{Troza} \quad H_{T_0+T} = H_1 + \left[\left(\frac{H_2 + H_1}{2 * (N_1 - N_2)} \right) + (T-1) * \left(\frac{H_2 + H_1}{(N_1 - N_2)} \right) \right] \quad 2$$

$$\text{Punta} \quad H_{T_0+T} = H_1 + \left[\left(\frac{H_2 + H_1}{2 * (N_1 - 0.5)} \right) + (T-1) * \left(\frac{H_2 + H_1}{(N_1 - 0.5)} \right) \right] \quad 3$$

donde: H_1 y H_2 = alturas de las secciones inferior y superior de la troza, N_1 y N_2 = número de anillos de las secciones inferior y superior de la troza, N_0 = edad del árbol, es decir el número de anillos del tocón (en el tocón $N_0=N_1$), T_0 = edad del árbol cuando alcanzó la altura H_1 , es decir $N_0 - N_1$, T = número entero de 1 a $N_1 - N_2$.

3.4 Metodología GADA

El Enfoque de Diferencias Algebraicas Generalizada (EDAG o GADA), consiste en seleccionar la ecuación base e identificar los parámetros específicos del sitio. Posteriormente debe definirse de forma explícita como cambian los parámetros entre las distintas estaciones, para después reemplazarlos con las funciones explícitas de X , que es una variable independiente oculta que describe la productividad del sitio (resultado de factores ambientales y las prácticas de manejo y silvicultura) y nuevos parámetros.

En esta investigación se utilizó el modelo de Richards (1959), la cual es flexible al tener una asíntota horizontal, presenta un patrón de crecimiento sigmoide, así como un punto de inflexión al modelar una relación altura dominante-edad.

Su forma general es la siguiente:

$$H = a_1 \left[1 - e^{a_2 \cdot t} \right]^{a_3} \quad 4$$

donde: H= altura dominante (m), t= edad (años), a_1 , a_2 , a_3 = parámetros del modelo. Por otra parte, la notación general de las formulaciones GADA, a_1, \dots, a_n se refieren a los parámetros del modelo base (parámetros locales que cambian de un sitio a otro), mientras que b_1, \dots, b_m son los parámetros globales que permanecen constantes para todos los sitios. A continuación, se cita la expresión del modelo.

$$Y = f(t, t_0, Y_0, b_1, b_2, \dots, b_m) \quad 5$$

donde: Y= es el valor de la función a la edad t, Y_0 = variable de referencia definida como el valor de la función a la edad t_0 .

En seguida se deriva el modelo polimórfico con múltiples asíntotas (Ec. 4), en el cual más de un parámetro debe de ser una función de la productividad del sitio. Según Cieszewski (2004) no es posible obtener una ecuación de un modelo GADA donde el parámetro a_2 varíe con la calidad de sitio, ya que cuando a_1 o a_3 es una función de X y el parámetro a_2 también es una función X, el modelo no puede ser resuelto para X.

Tomando en cuenta lo anterior, se concluye que la ecuación obtenida de Richards (1959) con la expresión GADA, los parámetros a_1 (asíntota) y a_3 pueden considerarse dependientes de la calidad de estación (X). En seguida se muestra la expresión de la relación.

$$a_1 = X, \quad a_3 = b_2 + \frac{b_3}{X} \quad \text{y} \quad a_2 = b_1 \quad 6$$

De esta manera, la ecuación de Richards se reestructura de la siguiente forma para dos pares de valores de altura dominante y edad.

$$H_0, t_0 \Rightarrow H_0 = e^X * \left(1 - e^{-b_1 * t_0}\right)^{b_2 + \frac{b_3}{X}}$$

7

$$H_1, t_1 \Rightarrow H_1 = e^X * \left(1 - e^{-b_1 * t_1}\right)^{b_2 + \frac{b_3}{X}}$$

donde H_0 = altura dominante a la edad inicial t_0 , H_1 = altura dominante a la edad t_1 . Al despejar y agregar el logaritmo en ambos lados de la primera de las igualdades, se logra obtener expresión siguiente.

$$\ln(H_0) = X + \left(b_2 + \frac{b_3}{X}\right) * \ln(1 - e^{-b_1 * t_0})$$

8

La solución X involucra las raíces de una ecuación cuadrática, y posteriormente se selecciona la función de la raíz más adecuada y se sustituye en la segunda expresión de la ecuación 7. De lo anterior, se deriva el polinomio de segundo grado en función de X el cual se puede despejar. El valor de X en la ecuación anterior, t_0 y H_0 toma los valores condicionales iniciales siguiente:

$$H_0 = \frac{1}{2} \left\{ \ln(H_0) - b_2 L_0 \pm \sqrt{[b_2 L_0 - \ln(H_0)]^2 - 4 b_3 L_0} \right\}$$

donde

9

$$L_0 = \ln \left[1 - e^{(-b_1 * t_0)} \right]$$

La selección del valor de X_0 , involucra el valor positivo de la raíz cuadrada para luego sustituirla en segunda igualdad de las ecuaciones 7 con la finalidad de obtener la expresión EDAG, y así obtener las curvas dinámicas con polimorfismo y múltiples asíntotas (Ec. 10).

$$H_1 = H_0 * \left[\frac{1 - e^{-b_1 * t_1}}{1 - e^{-b_1 * t_0}} \right]^{b_2 + \frac{b_3}{X}}$$

10

donde: X_0 = está dada por la Ec. 5, b_1 , b_2 , b_3 = parámetros globales

3.5 Método de ajustes

Se utilizó el método invariante denominado iterativo respecto a la edad de referencia, donde estima los efectos del sitio y a la vez asume que los datos contienen errores de medición y aleatorios (Cieszewski, 2003; Diéguez-Aranda, Álvarez González, Barrio-Anta, & Rojo-Alboreca, 2005) dado que es ideal para base de datos grandes (Vargas-Larreta *et al.*, 2010). Un primer paso consistió en la estimación de los parámetros globales, el cual considera de manera constante el parámetro local H_0 , el cual varía en cada árbol (se le asigna al principio la altura media observada a una edad base). Posteriormente, los valores estimados se tomaron como constantes y el parámetro H_0 se estimó para cada árbol, y ser ajustado una vez más, utilizando como valor inicial para los parámetros locales la altura observada a la mitad de la edad del árbol. En seguida el valor estimado de cada árbol del parámetro local es una constante y, este se ajusta nuevamente para obtener nuevos parámetros globales. Finalmente, el procedimiento se repite hasta que los parámetros globales queden estabilizados con valores significativos ($p < 0.0001$) y por ende una reducción de los errores (REMC) a través de varias iteraciones de manera consecutiva. El modelo de Richards fue ajustado con el procedimiento PROC MODEL del software SAS/ETS® (SAS Institute Inc. 2008) mediante la técnica de mínimos cuadrados ordinarios. Así mismo realizó la corrección de la autocorrelación (una relación entre los valores separados el uno del otro por un intervalo de tiempo dado) en los residuos (errores de predicción), para lo cual se utilizó el test de Dubin Watson (1971) (d), donde d es un valor comprendido entre 0 y 4; si el valor del estadístico d es próximo a 2, $p=0$ (significa que no hay correlación), si se aproxima a 4, $p < 0$ y si se aproxima 0, $p > 0$.

3.6 Estadísticos de bondad de ajustes analizados

Los resultados obtenidos de cada ecuación, fueron analizados mediante escalas numéricas y gráficas. A través de los residuales generados en la fase de ajuste se calcularon los estadísticos siguientes: el coeficiente de determinación ajustada (R^2_{adj}), el cual es deseable que alcance el valor de 1; en cuanto a la Raíz del Error Medio Cuadrático (REMC) es conveniente que tome el valor de cero. Por otra parte, el Criterio de Información Akaike (CIA) se considera apropiado porque presenta un menor valor (Del Carmen-García, Castellana, Rapelli, Koegel, & Catalano, 2014). La característica del sesgo (\bar{e}) es que, busca que el promedio de los residuales sea igual a cero, con lo que se logra que el estimador sea centrado o insesgado (Amat-Rodrigo, 2016).

La expresión de los estadísticos de bondad de ajuste es la siguiente:

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \left[\frac{n-1}{n-p-1} \right] \quad 6$$

$$REMC = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-p}} \quad 7$$

$$CIA = n * \ln(SCR) + 2(p + 1) - n * \ln(n) \quad 8$$

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - \bar{Y}_i)}{n} \quad 9$$

donde: SCR= Suma de Cuadrado del Error, Y_i = valores observados, \hat{Y}_i = valores predichos, \bar{Y}_i = valores promedio, p = número de parámetros a estimar, n = número de observaciones.

4. RESULTADOS

4.1 Ecuación dinámica

De acuerdo con la prueba de t-Student, los parámetros fueron estadísticamente significativos con valores de $p < 0.0001$, menores al valor crítico ($\alpha = 0.05$); lo cual significa que cualquier valor menor a este, conlleva el rechazo de la hipótesis

nula. Con base en los criterios estadísticos y gráficos se puede verificar que el modelo de Richards con enfoque GADA es pertinente para describir el patrón de crecimiento en altura dominante (H_0) a una cierta edad de referencia para calificar los niveles de productividad, sin afectar las predicciones de índice de sitio (IS) o H_0 en la modalidad polimórfica en las 12 UMAFORES. De esta manera se describe que en la investigación se obtuvieron sesgos menores a 1 m, así como REMC menores a 1.2 m con coeficientes de determinación ajustados (R^2_{adj}) que explican más 97% de la varianza total del crecimiento de la altura en función a la edad. Además, se obtuvieron CIA convincentes y valores de Durbin Watson aproximados a 2 que indica que no existe autocorrelación en forma general (Cuadro 2). Al utilizar este método, la ecuación base puede ser expandida sobre el crecimiento, lo cual hace que más de un parámetro del modelo dependa de la calidad de sitio con curvas a la vez flexibles y de múltiples asíntotas.

Cuadro 2. Parámetros estimados y estadísticos de ajuste de índice de sitio

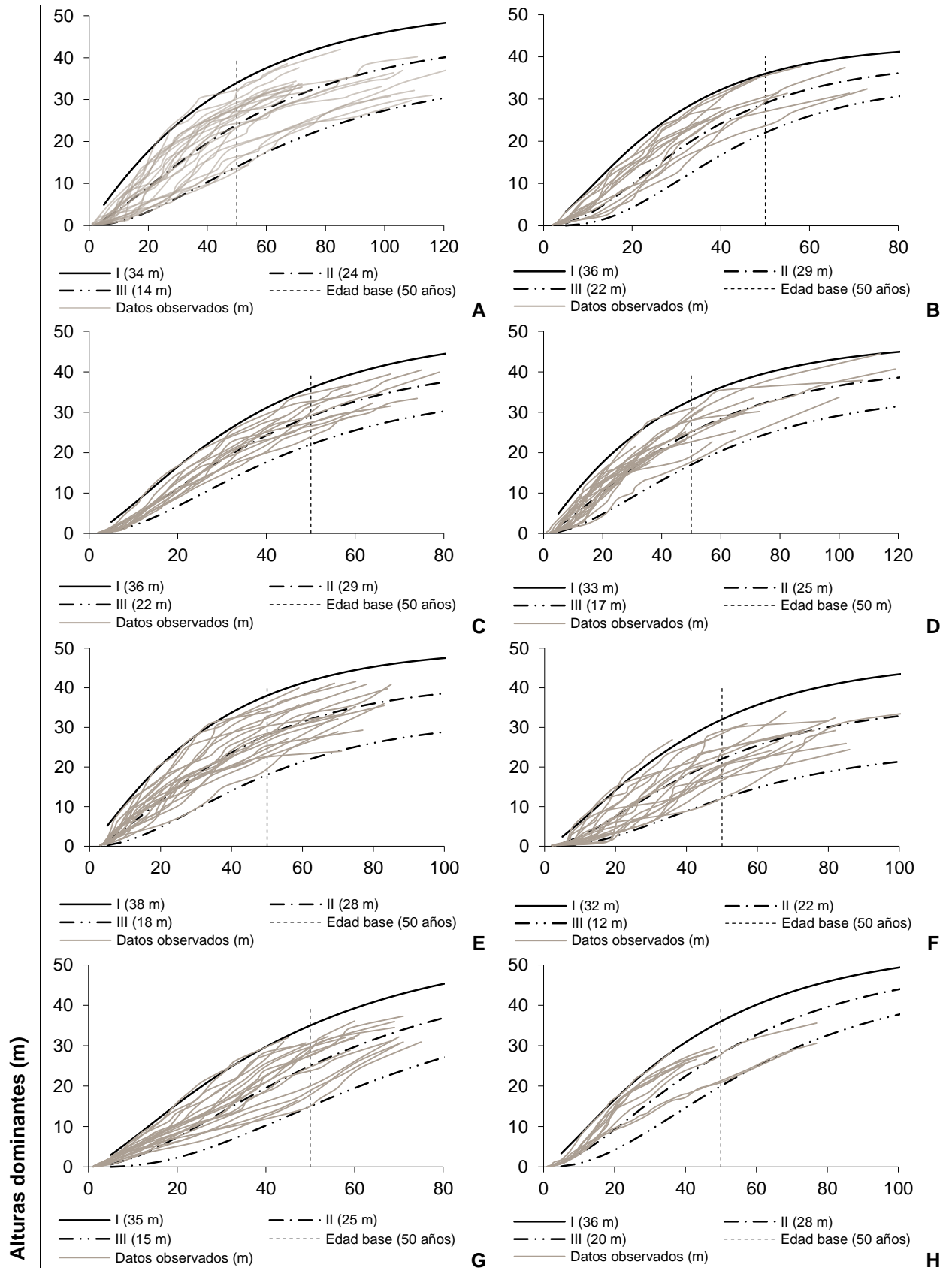
UMAFOR	Estimadores de parámetros			Errores estándar			Bondad de ajustes				
	b ₁	b ₂	b ₃	b ₁	b ₂	b ₃	Sesgo (m)	REMC (m)	R ² _{adj}	CIA	Durbin Watson
1303	0.0215	-11.2831	48.7592	0.0012	0.9194	3.4411	-0.0083	1.140	0.989	119.405	1.7945
1503	0.0450	-34.4025	135.4675	0.0034	12.3273	45.1754	0.0065	0.897	0.992	-35.165	1.8204
1507	0.0331	-6.9173	32.9345	0.0024	1.6064	6.0675	0.0004	0.880	0.994	-44.907	1.9375
1508	0.0245	-11.2692	47.5785	0.0017	3.6285	13.5964	-0.0479	1.077	0.988	42.953	1.6873
1509	0.0312	-9.0155	39.8650	0.0023	2.1371	8.0381	0.0038	1.244	0.988	127.794	1.7303
1510	0.0298	-5.0960	25.3848	0.0032	1.6802	6.0527	0.0106	1.608	0.969	303.256	1.8010
1604	0.0258	-23.1380	98.1074	0.0021	4.4548	17.7117	0.0408	0.933	0.993	-51.509	1.7900
1605	0.0295	-18.3545	75.3568	0.0030	5.3515	19.7033	-0.0153	0.774	0.993	-70.247	1.6665
1607	0.0473	-23.3945	98.1925	0.0028	3.7178	13.8686	-0.0290	0.821	0.994	-80.077	2.1486
2105	0.0389	-11.7544	50.7659	0.0025	3.0581	11.0711	0.0149	0.681	0.996	-91.401	1.9382
2901	0.0150	-1.9402	11.4717	0.0019	0.3729	1.3434	-0.0702	1.175	0.983	169.141	1.6599
2902	0.0165	-16.9370	67.0074	0.0019	4.2031	14.9784	-0.0353	1.226	0.978	102.709	1.8018

4.2 Familias de curvas de índice de sitio

En base a los análisis estadísticos, se puede apreciar que el modelo describe adecuadamente el crecimiento en altura de forma biológica y se apega a las condiciones de diferentes niveles de productividad o índice de sitio. El modelo genera polimorfismo asintótico plausible al tener un punto de inflexión, así como predicciones de manera consistente e invariante de la edad de referencia.

En la siguiente figura se aprecian las curvas obtenidas para los diferentes índices para cada UMAFOR a una edad base de 50 superpuestas en los gráficos de perfil de los árboles empleados en el ajuste, donde se muestra que las curvas siguen una trayectoria de los datos en los rangos de edades y que describen el crecimiento en un sentido biológico para las edades correspondientes. La edad base fue determinante para evitar discrepancias, dado que en edades jóvenes suelen ser susceptibles en los cambios ambientales. La calificación de los índices de sitio (IS) fue calidad baja (III), media (II) y alta (I).

Las calidades de sitio que se establecieron fueron variantes en las unidades de manejo, por lo que la escala cambió de un índice de sitio a otro, tomando los valores de 7, 8, 9, 10 y 12 metros. Las curvas presentaron buenos ajustes debido a la generalización del modelo, lo que permite observar curvas polimórficas con múltiples asíntotas. En este sentido, se destacan algunas características propias de las UMAFORES, donde la 1503 (**B**) y 1507 (**C**) son las que presentaron valores de IS más altos, y para los sitios de 2901 (**K**) inició desde los 5 (IS, m), seguida por la 2902 (**L**) partiendo de los 8 m. Así mismo, las asíntotas en sitios ricos (I) ocurren en su mayoría de 100 años en adelante como resultado de su ritmo de crecimiento.



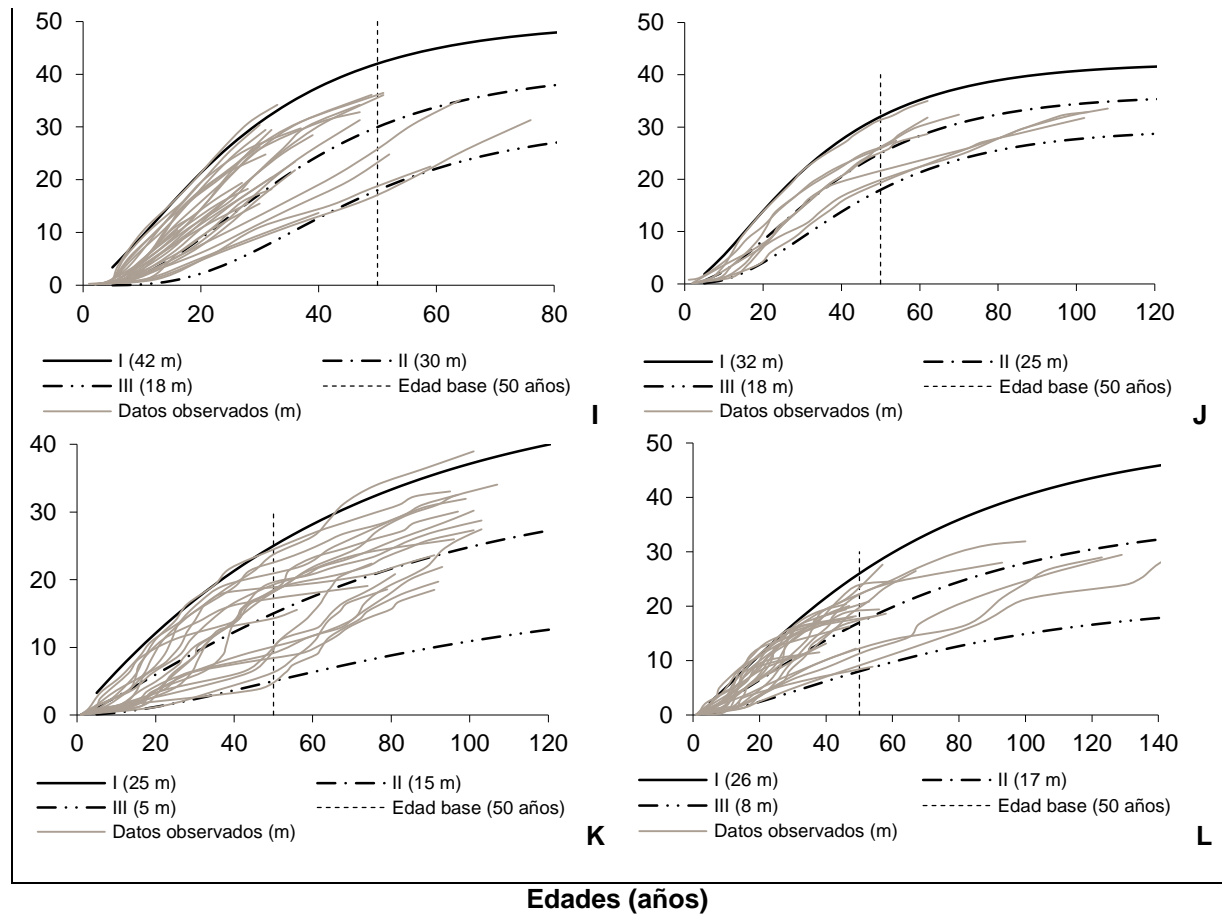
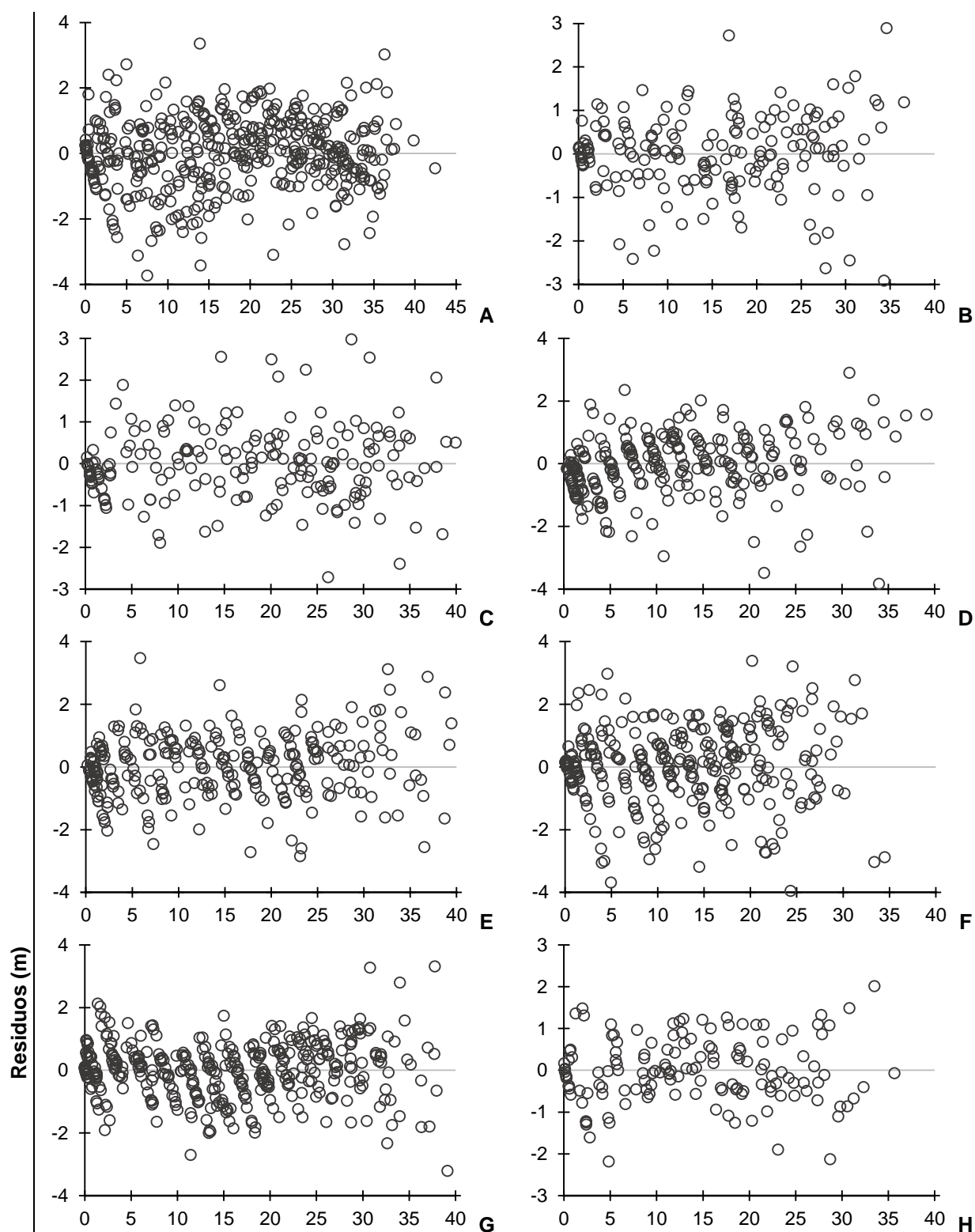


Figura 1. Curvas de índice de sitio, donde: A=1303, B=1503, C=1507, D=1508, E=1509, F=1510, G=1604, H=1605, I=1607, J=2105, K=2901, L=2902.

4.3 Análisis de residuos

Después de que se realizó el análisis estadístico del modelo, se puede complementar su pertinencia mediante el análisis gráfico; considerado como la forma más eficiente para evaluar la eficiencia. Con el método iterativo la expresión GADA permitió el ajuste simultáneo, así como la comparación de la tasa de cambio, lo que permitió obtener excelentes resultados para cada UMAFOR, ya que se observa un patrón aleatorio de los residuos alrededor de la línea cero (modelo), evidenciando una varianza constante en las predicciones a distintas alturas (Figura 2).



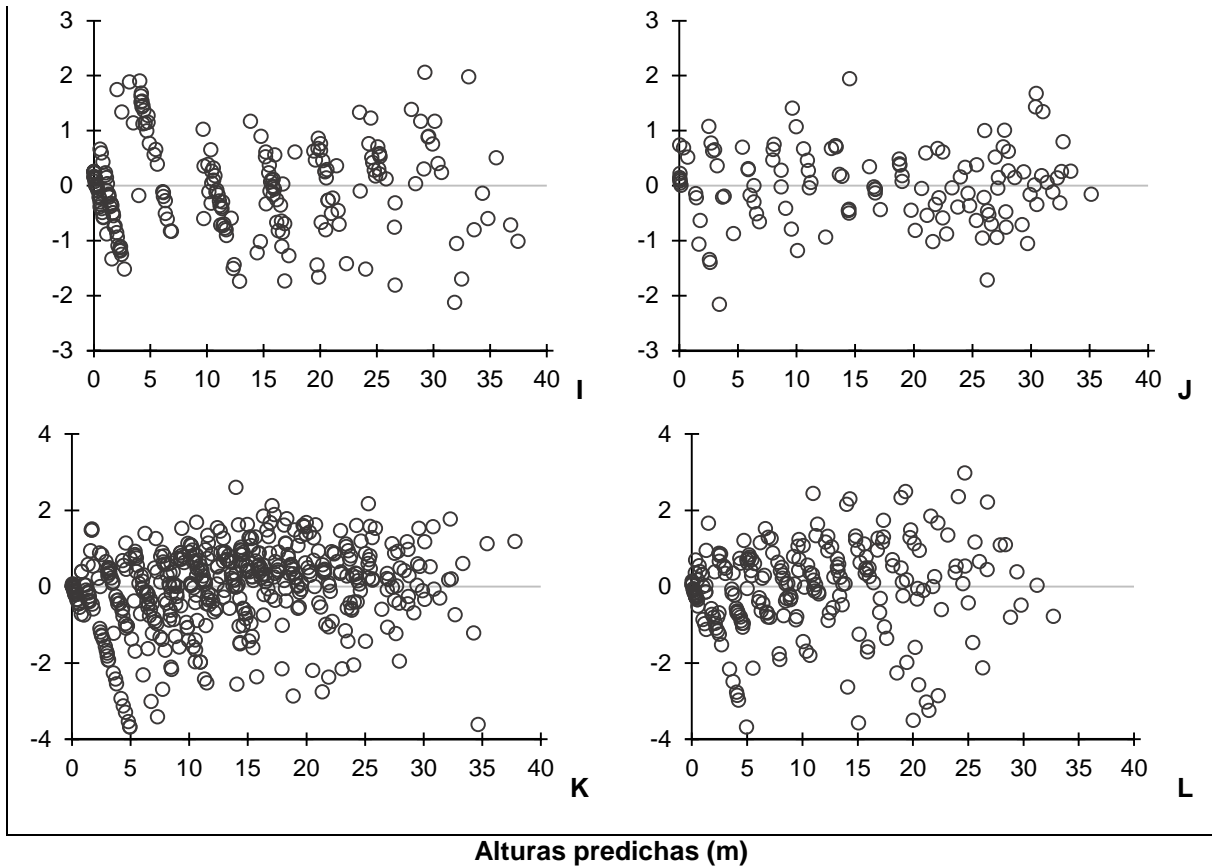


Figura 2. Residuales vs predichos, donde: A=1303, B=1503, C=1507, D=1508, E=1509, F=1510, G=1604, H=1605, I=1607, J=2105, K=2901, L=2902.

5. DISCUSIÓN

La calidad en la bondad de ajuste obtenida en la investigación fue adecuada. Distintos autores revelan la ganancia significativa que se tiene al utilizar el método GADA para la predicción y proyección del crecimiento a edades mayores a la utilizada. En este sentido, Vargas-Larreta *et al.* (2017) reportaron excelentes resultados para 97 especies incluidas de bosques trocales y templados en México, misma que se encuentra disponible en la plataforma digital denominado Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor, 2016). En dicha investigación se observa que las bondades de ajustes referentes a los coeficientes (R^2_{adj}) así como la REMC comparten información similar respecto a *Abies religiosa*. De igual forma, se aporta información nueva para las UMAFORES 1510 (Ciudad de México), y la 2105 de Puebla. Los sistemas, en forma GADA de crecimiento en altura

dominante e índice de sitio son preferibles en los trabajos de manejo, así como en la planeación forestal (Kahriman, Sönmez, & Gadow, 2018).

En este estudio se demuestra que el modelo de Richards es ligeramente mejor estadísticamente a la ecuación de Korf polimórfica reportada en la plataforma SiBiFor para la región 1508 de México, sobre todo al reducir (REMC) el error utilizando la edad de referencia de 50 años. Debido a lo anterior, Vargas-Larreta, Aguirre-Calderón, Corral-Rivas, Crecente-Campo, y Diéguez-Aranda (2013) recomiendan seleccionar una edad base mayor para no generar inconvenientes, ya que en edades jóvenes la clasificación de la calidad de sitio puede verse afectada la estimación de la altura total por las condiciones ambientales.

Debido a los factores ambientales (diferencias químicas y físicas del suelo, entre otras), el manejo silvícola e incluso en zonas que no tienen algún programa de manejo, así como las características genéticas de las especie, los distintos rodales pueden verse afectados alterando patrones de crecimiento entre los sitios (Montero, Ugalde, & Kanninen, 2001; Mora, Muñoz, Meza, & Fonseca, 2015; Camacho, Alvarado, & Fernández-Moya, 2016; Camacho, Alvarado, & Fernández-Moya, 2017). Yilmaz (2019) concluye que el índice de sitio varía con la altitud y el grado de inclinación de la región, por lo cual es importante el conocimiento en las áreas potenciales para el manejo y sobre todo para el establecimiento de plantaciones.

El propósito de conocer el patrón de crecimiento en altura dominante de los árboles, es que sea el medio para calificar la productividad del sitio y no solo para predecir la altura del rodal a una edad de referencia (Clutter, Fortson, Pienaar, Brister, & Bailey, 1983; Hernández-Ramos *et al.*, 2015).

De acuerdo a García (2011) y Vargas-Larreta *et al.* (2017) afirman que los sistemas de cómputo son herramientas indispensables, ya que ofrecen ventajas para simular la dinámica forestal, y de esta forma los manejadores de bosques puedan utilizar el sistema de ecuaciones para definir los regímenes ideales para la especie en estudio.

Stankova y Diéguez-Aranda (2012), Galindo-Soto, Vargas-Larreta, Hernández, y Cruz-Cobos (2017), Westfall, Hatfield, Sowers, y O'Connell (2017) y Hernández-

Cuevas *et al.* (2018) obtuvieron resultados similares a los de esta investigación sobre la capacidad de precisión del modelo con este enfoque (Stankova y Diéguez-Aranda, 2012), evidenciando la gran flexibilidad del modelo (Tang *et al.*, 2016); en donde las curvas permiten clasificar los bosques naturales en base a su potencial mediante las condiciones de manejo de distintas especies (Delgado-Caballero *et al.*, 2009).

El método fue empleado también en los trabajos de Quiñonez-Barraza *et al.* (2015) que obtuvo excelentes resultados para especies de *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. teocote*, *P. leiophylla*, y *P. ayacahuite* en rodales mezclados con la misma edad de referencia (60 años). Tamarit-Urias, Santos-Posadas, Aldrete, Valdez-Lazalde, y Ramírez-Maldonado (2014) reportaron sus aportaciones científicas sobre las plantaciones de *Tectona grandis* en Campeche, México. De igual forma Rodríguez-Carrillo, Cruz-Cobos, Vargas-Larreta, y Hernández (2015) encontraron altos ajustes estadísticos sobre táscate (*Juniperus deppeana* Steud.); lo mismo que Castillo-López *et al.* (2013) al estudiar *Pinus arizonica*, *P. durangensis*, *P. leiophylla* y *P. teocote*; ambos realizados en Durango. Las investigaciones de Carrero, Jerez, Macchiavelli, Orlandoni, y Stock (2008) y de Attis-Beltrán *et al.* (2015) para especies de *Eucalyptus urophylla* y bosques mixtos de *Nothofagus alpina* y *N. obliqua* (Neuquén, Argentina), reportan resultados similares a los obtenidos en este trabajo.

6. CONCLUSIONES

El modelo de Richards utilizado mediante la metodología GADA, mostró buenos resultados en cuando a la bondad de ajuste para modelar las curvas de índice de sitio de altura dominante-edad para *Abies religiosa*, ya que este modelo por las características biológicas que posee le facilita describir las relaciones que existe entre las variables en un sentido biológico.

Las ecuaciones generadas son de tipo polimórfico con múltiples asíntotas, invariante con respecto a la edad base; por lo que estiman de forma directa la altura dominante y el índice de sitio a cualquier edad o altura.

Las ecuaciones se recomiendan para elaborar planes de manejo, para clasificar la productividad maderable, y pueden incorporarse en modelos de rendimiento y crecimiento.

7. REFERENCIAS

- Ahmadi, K., & Alavi, S. J. (2016). Generalized height-diameter models for *Fagus orientalis* Lipsky in Hyrcanian forest, Iran. *Journal of forest science*, 62(9), 413-421. doi: 10.17221/51/2016-JFS.
- Allen, M. G., & Burkhart, H. E. (2015). A comparison of alternative data sources for modeling site index in loblolly pine plantations. *Canadian Journal of Forest Research*, 45(8), 1026–1033. doi: 10.1139/cjfr-2014-0346
- Amat-Rodrigo, J. (2016). Selección de predictores y mejor modelo lineal múltiple. RPubS. Madrid, España. 83 p.
- Antón-Fernández, C., Mola-Yudego, B., Dalsgaard, L., & Astrup, R. (2016). Climate-sensitive site index models for Norway. *Canadian Journal of Forest Research*, 46(6), 794–803. doi: 10.1139/cjfr-2015-0155.
- Attis Beltrán, H., Chauchard, L. M., & Martínez Pastur, G. (2015). Curvas preliminares de índice de sitio para bosques puros y mixtos de *Nothofagus alpina* y *Nothofagus obliqua* en la Patagonia Argentina. *Bosque (Valdivia)*, 36(2), 275-285.
- Bailey, R. L., & Clutter, J. L. (1974). Base-age invariant polymorphic site curves. *Forest Science*, 20(2), 155–159. doi: 10.1093/forestscience/20.2.155
- Baluart-Vásquez, J. R., & Álvarez-Gonzales, J. G. (2015). Modelamiento del crecimiento de tornillo *Cedrelinga catenaeformis* Ducke en plantaciones en Genaro Herrera, departamento de Loreto, Perú. *Folia Amazónica*, 24(1), 21-32.
- Camacho, M. E., Alvarado, A., & Fernández-Moya, J. (2016). *Vochysia guatemalensis* Donn. Smith, an alternative species for reforestation on acid tropical soils. *New Forests*, 47(4), 497-512.

- Camacho, M. E., Alvarado, A., & Fernández-Moya, J. (2017). Accumulation and export of nutrients in harvested wood of *Vochysia guatemalensis* in small-scale forest plantations. *Journal of Tropical Forest Science*, 29(1), 105-113.
- Carmean, W. H. (1972). Site index curves for upland oaks in the Central States. *For. Sci.* 18, 109-120.
- Carrero, O., Jerez, M., Macchiavelli, R., Orlandoni, G., & Stock, J. (2008). Ajuste de curvas de índice de sitio mediante modelos mixtos para plantaciones de *Eucalyptus urophylla* en Venezuela. *Interciencia*, 33(4), 265-272.
- Castillo-López, A., Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Nájera-Luna, J. A., Cruz-Cobos, F., & Hernández, F. J. (2013). Modelo compatible altura-índice de sitio para cuatro especies de pino en Santiago Papasquiaro, Durango. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 4(18), 89-103.
- Cieszewski, C. J. (2001). Three methods of deriving advanced dynamic site equations demonstrated on inland Douglas-fir site curves. *Can. J. For. Res.*, 31, 165-173.
- Cieszewski, C. J. (2002). Comparing fixed- and variable-base-age site equations having single versus multiple asymptotes. *For. Sci.*, 48, 7-23.
- Cieszewski, C. J. (2003). Developing a well-behaved dynamic site equation using a modified Hossfeld IV function $Y_3 = (axm)/(c + xm - 1)$, a simplified mixed-model and scant subalpine fir data. *For. Sci.*, 49, 539-554.
- Cieszewski, C. J. (2004). GADA derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes from Richards, Weibull, and other exponential functions. *University of Georgia PMRC-TR*, 5, 2004. Athens, Georgia. 16 p.
- Cieszewski, C. J., & Bailey, R. L. (2000). Generalized algebraic difference approach: theory based derivation of dynamic site equations with polymorphism and variable asymptotes. *Forest Science*, 46(1), 116–126. doi: 10.1093/forestscience/46.1.116.

- Clutter, J. L., Fortson, J. C., Pienaar, L. V., Brister, H. G., & Bailey, R. L. (1983). Timber Management: A Quantitative Approach. John Wiley & Sons, Inc. New York. 333 p.
- Del Carmen-García, M., Castellana, N., Rapelli, C., Koegel, L., & Catalano, M. (2014). Criterios de información y predictivos para la selección de un modelo lineal mixto. *SaberEs*, 6, 61–76. Retrieved from <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5515546>.
- Delgado-Caballero, C. E., Gómez-Guerrero, A. J., García- Salazar, A., Valdez-Lazalde, J. R., Santos-Posada, H. M., Fierros-González, A. M., & Horwath, W. R. (2009). Índice de sitio y propiedades del suelo en plantaciones jóvenes de *Eucalyptus grandis* y *Eucalyptus urophylla* en el sureste de México. *Agrociencia*, 43(1), 61-72.
- Diéguez-Aranda, U., Álvarez González, J. G., Barrio-Anta, M., & Rojo-Alboreca, A. (2005). Site quality equations for *Pinus sylvestris* L. plantations in Galicia (northwestern Spain). *Annals of Forest Science*, 62(2), 143-152.
- Diéguez-Aranda, U., Rojo-Alboreca, A., Castedo-Dorado, F., Álvarez-González, J. G., Barrio-Anta, M., Crecente-Campo, F., ...Sánchez-Rodríguez, F. (2009). *Herramientas silvícolas para la gestión forestal sostenible en Galicia*. Dirección Xeral de Montes, Consellería de Medio Rural. Galicia, España. 273 p.
- Durbin, J., & Watson, G. S. (1971). Testing for serial correlation in least squares regression. III. *Biometrika*, 58(1), 1-19.
- Dyer, M. E. & Bailey, R. L. (1987). A test of six methods for estimating true heights from stem analysis data. *For. Sci.*, 33, 3-13.
- Fabbio, G. Frattegiani, M., & Manetti, M. C. (1994) Height estimation in stem analysis using second differences. *For. Sci.*, 40, 329-340.
- Galindo-Soto, J. E., Vargas-Larreta, B., Hernández, F. J., & Cruz-Cobos, F. (2017). Modelo compatible altura dominante - índice de sitio para mezquite (*Prosopis laevigata* Humb. et Bonpl. ex Willd) del semidesierto de Durango. *Revista Chapingo Serie Zonas Áridas*, 16(1), 23-31. doi: 10.5154/r.rchsza.2015.10.16.

- García, O. (2011). Dynamical implications of the variability representation in site-index modelling. *European Journal of Forest Research*, 130(4), 671–675. doi: 10.1007/ s10342-010-0458-0.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., González- Tagle, M. A., Treviño-Garza, E. J., Jiménez-Pérez, J., Vargas-Larreta, B., ... De los Santos-Posada, H. M. (2019). Relación altura-diámetro para *Abies religiosa* Kunth Schltdl. & Cham. en el centro y sur de México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 10(52), 100–120. DOI: 10.29298/rmcf.v10i52.483.
- Guzmán-Santiago, J. C., Aguirre-Calderón, O. A., & Vargas-Larreta, B. (2020). Forest volume estimation techniques with special emphasis on the tropics. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 26(2), 0-0. DOI: 10.5154/r.rchscfa.2019.07.061.
- Hernández-Cuevas, M., Santiago-García, W., Santos-Posadas, H. M., Martínez-Antúnez, P., & Ruiz-Aquino, F. (2018). Modelos de crecimiento en altura dominante e índices de sitio para *Pinus ayacahuite* Ehren. *Agrociencia*, 52(3), 437-453.
- Hernández-Ramos, J., García-Magaña, J. J., García-Cuevas, X., Hernández-Ramos, A., Muñoz-Flores, H. J., & Samperio-Jiménez, M. (2015). Índice de sitio para bosques naturales de *Pinus teocote* Schlecht. & Cham. en el oriente del estado de Hidalgo. *Revista mexicana de ciencias forestales*, 6(27), 24-37.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2016). Compendio de información geográfica. Recuperado de: 09-05-2020 en www.internet.contenidos.inegi.org.mx/contenidos/Productos/...2016/702825087357.pdf.
- Kahriman, A., Sönmez, T., & Gadow, K. V. (2018). Site index models for Calabrian pine in the central Mediterranean region of Turkey. *Journal of Sustainable Forest*, 37(5), 459–474. doi: 10.1080/10549811.2017.1421086
- Montero, M., Ugalde, L., & Kanninen, M. (2001). Relación del índice de sitio con los factores que influyen en el crecimiento de *Tectona grandis* L. f. y

- Bombacopsis quinata* (Jacq.) Dugand, en Costa Rica. *Revista Forestal Centroamericana*, 35, 13-18.
- Mora, F., Meza, V., Porras, Á., Sandí, C., & Aguilar, L. (2019). Curvas diferenciadas de índice de sitio para *Vochysia guatemalensis* en la región Huetar Norte y Huetar Caribe de Costa Rica. *Agronomía Costarricense*, 43(2), 123-138.
- Mora, F.; Muñoz, R., Meza, V., & Fonseca, W. (2015). Factores edáficos que influyen en el crecimiento de *Vochysia guatemalensis* en la región Huetar Norte de Costa Rica. *Agronomía Costarricense*, 39(1), 71-89.
- Newberry, J. D. (1991). A note on Carmean's estimate of height from stem analysis data. *For. Sci.*, 37(1), 368-369.
- Quiñonez-Barraza, G., Santos-Posadas, H. M., Cruz-Cobos, F., Velázquez-Martínez, A., Ángeles-Pérez, G., & Ramírez-Valverde, G. (2015). Índice de sitio con polimorfismo complejo para masas forestales de Durango, México. *Agrociencia*, 49(4), 439-454.
- Quiñonez-Barraza, G., Zhao, D., Santos-Posadas, H. M., & Corral-Rivas, J. J. (2020). An approximate height growth and site index model for *Quercus sideroxylla* Bonpl. in mixed-species stands of Durango, Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 26(1), 53-69. doi: 10.5154/r.rchscfa.2019.03.025.
- Richards, F. J. (1959). A flexible growth function for empirical use. *Journal of Experimental Botany*, 10, 290-300.
- Rodríguez-Carrillo, A., Cruz-Cobos, F., Vargas-Larreta, B., & Hernández, F. J. (2015). Compatible dominant height - site index model for juniper (*Juniperus deppeana* Steud.). *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 21(1), 97–108. doi: 10.5154/r.rchscfa.2014.09.041.
- Sharma, M., & Parton, J. (2018). Climatic effects on site productivity of red pine plantations. *Forest Science*, 64(5), 544–554. doi: 10.1093/forsci/fxy013.
- Sistema Biométrico Forestal (SiBiFor). (2016). Biblioteca digital del sistema biométrico para la planeación del manejo forestal sustentable de los

ecosistemas con potencial maderable en México. Recuperado de:
<http://fcfposgrado.ujed.mx/sibifor/inicio/buscar.php>.

Stankova, T., & Diéguez-Aranda, U. (2012). A tentative dynamic site index model for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) plantations in Bulgaria. *Silva Balcanica*, 13(1), 5-19.

System Statistical Analysis (SAS). (2008). SAS/STAT® 9.2 User's Guide Second Edition. Raleigh, NC, EE. UU., SAS Institute Inc. s/p. Recuperado de:
<https://support.sas.com/documentation/cdl/en/statug/63033/HTML/default/viewer.htm>.

Tamarit-Urias, J. C., Santos-Posadas, H. M., Aldrete, A., Valdez-Lazalde, J. R., & Ramírez-Maldonado, H. (2014). Ecuaciones dinámicas de índice de sitio para *Tectona grandis* en Campeche, México. *Agrociencia*, 48(2), 225-238.

Tang, X., Pérez-Cruzado, C., Torsten, V., Fehrmann, L., Álvarez-González, J. G., & Kleinn, C. (2016). Development of a compatible taper function and stand-level merchantable volume model for Chinese fir plantations. *Forestry*, 11(1), 1-15. doi:10.1371/journal.pone.0147610.

Vargas-Larreta, B., Álvarez-González, J. G., Corral-Rivas, J. J., & Aguirre Calderón, Ó. A. (2010). Construcción de curvas dinámicas de índice de sitio para *Pinus cooperi* Blanco. *Revista fitotecnica mexicana*, 33(4), 343-350.

Vargas-Larreta, B., Aguirre-Calderón, O. A., Corral-Rivas, J. J., Crecente-Campo, F., & Diéguez-Aranda, U. (2013). Modelo de crecimiento en altura dominante e índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el noreste de México. *Agrociencia*, 47(1), 91-106.

Vargas-Larreta, B., Corral-Rivas, J. J., Aguirre-Calderón, O. A., López-Martínez, J. O., Santos-Posadas, H. M., Zamudio-Sánchez, F. J., ... Aguirre-Calderón, C. G. (2017). SiBiFor: Forest Biometric System for forest management in Mexico. *Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente*, 23(3), 437-455. doi: 10.5154/r.rchscfa.2017.06.040.

- Weiskittel, A.R., Hann, D. W., Kershaw, J. A., & Vanclay, J. K. (2011). Forest site evaluation. P. 37-52 in Forest Growth and Yield Modeling. John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, UK.
- Westfall, J. A., Hatfield, M. A., Sowers, P. A., & O'Connell, B. M. (2017). Site index models for tree species in the Northeastern United States. *Forest Science*, 63(3), 283– 290. doi: 10.5849/FS-2016-090
- Yılmaz, M. (2019). Effects of soil and environmental factors on the site productivity of pure Oriental beech forests in Akkuş Region of Turkey. *Eurasian Journal of Forest Science*, 7(2), 107-120.
- Yue, C., Mäkinen, H., Klädtke, J., & Kohnle, U. (2014). An approach to assessing site index changes of Norway spruce based on spatially and temporally disjunct measurement series. *Forest Ecology and Management*, 323, 10–19. doi: 10.1016/j.foreco.2014.03.031